

## Linéarité de l'intégrale et conséquences

### Exercice 1:

Démontrer le théorème suivant : Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a; b]$  et  $\lambda$  un nombre réel :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$

### Exercice 2:

Sachant que  $\int_0^1 e^x dx = e - 1$  et  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ , calculer  $\int_0^1 5e^x - 3x^2 dx$  puis  $\int_0^1 e^x + 5x^2 dx$ .

### Exercice 3:

Démontrer le théorème suivant :

Pour  $a < b$ , si  $f \leq g$  sur  $[a; b]$  alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

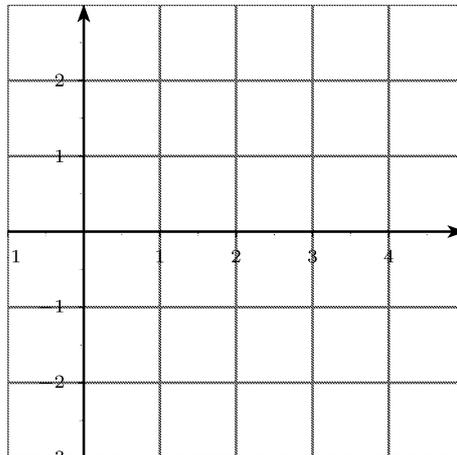
### Exercice 4:

Démontrer à l'aide d'un exemple que la réciproque du théorème ci-dessous est fausse.

### Exercice 5:

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$

1. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction  $f$  sur  $[0; 4]$ .



2. Déterminer le signe de  $f$  sur  $[0; 4]$ .

3. Calculer  $\int_0^4 f(x) dx$ .

4. En déduire l'aire entre la courbe de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 4$ .

### Exercice 6:

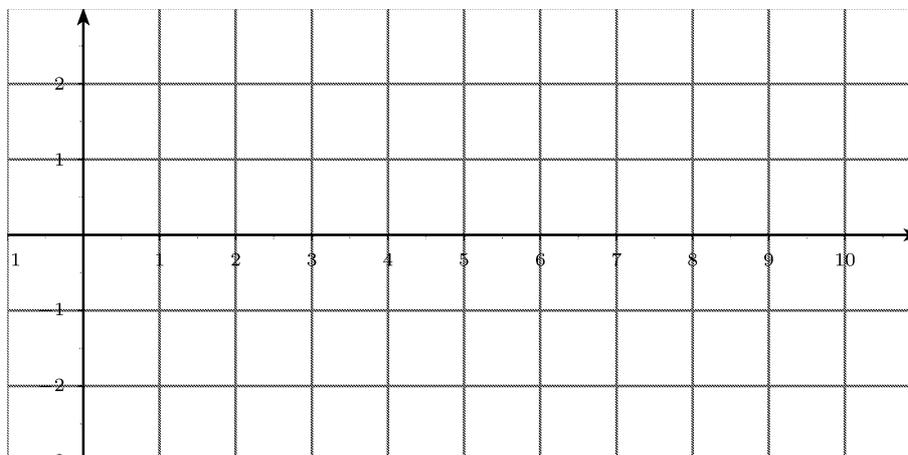
Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{2}{1-x}$ .

Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 2$  et  $x = 10$ .

**Exercice 7:**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 4 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3} & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

- Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction  $f$  sur  $[0; 10]$ .



- Déterminer le signe de  $f$  sur  $[0; 10]$ .
- Calculer  $\int_0^2 f(x)dx$ ,  $\int_2^4 f(x)dx$ ,  $\int_4^7 f(x)dx$ ,  $\int_7^{10} f(x)dx$ .
- En déduire l'aire entre la courbe de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 10$ .

**Exercice 8:**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = (x + 1)e^x$ .

Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -3$  et  $x = 2$ .

**Exercice 9:**

Déterminer l'aire située entre les courbes des fonctions carré et racine carré pour  $x \in [0; 1]$  :

