

Chapitre 11: Loi à densité

1 Lois de probabilité à densité

1.1 Introduction

En première, on a introduit la notion de variable aléatoire X sur des ensembles Ω finis. Pour définir la loi de la variable aléatoire X , il nous suffisait de donner $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et de déterminer $P(X = x_k)$ pour $k \in [1; n]$. Par exemple, si on considère l'expérience suivante :

Un joueur lance deux fois une pièce équilibrée; il gagne 2 euros par « pile » obtenu et perd 1 euro par « face » obtenu. On modélise l'expérience grâce à l'univers $\Omega = \{2P; 1F1P; 2F\}$ et la loi de probabilité :

Issue	2P	1F1P	2F
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La variable aléatoire X qui à chaque issue associe le gain algébrique correspondant du joueur est définie par $X(\Omega) = \{-2; 1; 4\}$ et :

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On considère l'expérience suivante :

On tire sur une cible circulaire de 1 mètre de rayon sans jamais la manquer.

La variable aléatoire X qui indique la distance, en mètre, du point d'impact au centre prend toutes les valeurs de $[0; 1]$.

Dans ces conditions, il n'est plus possible de définir la loi de X en dressant le tableau des probabilités de chacun des événements $X = x_i$ puisqu'il y en a une infinité. Une autre approche est alors nécessaire. On va donc s'intéresser aux événements du type « X prend ses valeurs dans J » noté « $X \in J$ ». Il s'agit alors de définir la probabilité de $P(X \in J)$.

Dans notre exemple, $P(X \notin [0; 1]) = 0$ donc on pour déterminer la loi de X , on cherchera à déterminer $P(X \in [0; r]) = P(X \leq r)$ avec $r \in [0; 1]$.

1.2 Variable aléatoire suivant une loi à densité

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle (borné ou non) de \mathbb{R} .

Définition:

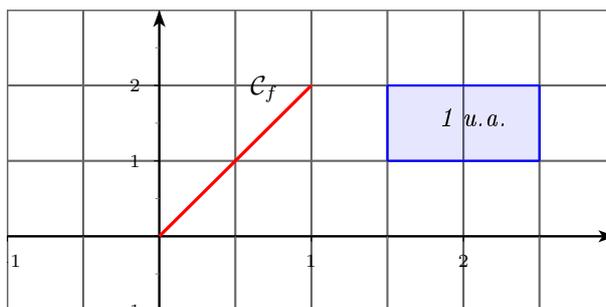
On appelle **densité de probabilité sur I** toute fonction définie sur I telle que :

- f est continue (sauf en un nombre fini de points) et positive sur I ;
- l'aire sous la courbe C_f est égale à 1 u.a.

Exemple:

Dans l'exemple de la cible, on a $I = [0; 1]$ et on admet que X a pour densité la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0; 1] \end{cases}$$

**Définition:**

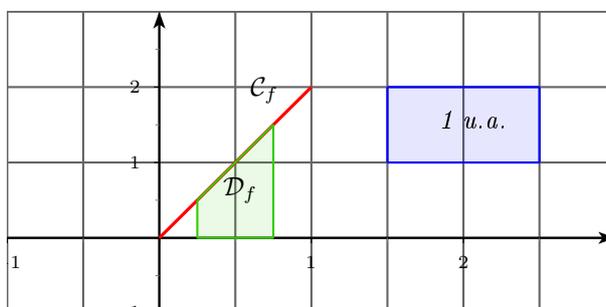
f désigne une densité de probabilité définie sur I . Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi de densité f signifie qu'à tout intervalle $J \subset I$, on associe la probabilité :

$$P(X \in J) = \text{aire}(\mathcal{D}_f)$$

où \mathcal{D}_f est le domaine sous la courbe \mathcal{C}_f sur l'intervalle J .

Exemple:

Pour déterminer la probabilité que la flèche soit arrivée à une distance comprise entre 0,25 et 0,75 mètre du centre, on calcule l'aire sous la courbe entre 0,25 et 0,75 soit :



On a donc

$$\begin{aligned} P(X \in [0,25; 0,75]) &= \int_{0,25}^{0,75} 2x dx \\ &= [x^2]_{0,25}^{0,75} \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Attention, si on cherche à déterminer $P(X = 0,25)$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X = 0,25) &= \int_{0,25}^{0,25} 2x dx \\ &= [x^2]_{0,25}^{0,25} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que X prenne une valeur isolée de l'intervalle $[0; 1]$ est nulle et cela se généralise pour toutes les variables aléatoires suivant une loi à densité. On en déduit donc que pour toutes les variables aléatoires suivant une loi à densité :

$$P(X \leq a) = P(X < a)$$

Remarque:

Pour tout intervalle $J \subset I$, on a $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$

2 Loi uniforme

Définition:

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction constante sur $[a; b]$ de valeur $\frac{1}{b-a}$.

Propriété:

Pour tout intervalle $[c; d] \subset [a; b]$, $P(X \in [c; d]) = \frac{d-c}{b-a}$

Définition:

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle fermé $[a; b]$ est :

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

Théorème:

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$. Son espérance mathématique est $E(X) = \frac{a+b}{2}$

3 Lois exponentielles

Définition:

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Propriété:

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ , alors :

- pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- En utilisant l'événement contraire, $P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.
- Pour tout a et b positifs, $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$;

Théorème:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$$

On dit que une loi exponentielle est sans vieillissement ou sans mémoire.

Démonstration:

Soit $t > 0$ fixé et $h > 0$, la probabilité que $X \geq t+h$ sachant que $X \geq h$ est égale à :

$$\begin{aligned} P_{X \geq t}(X \geq t+h) &= \frac{P((X \geq h) \cap (X \geq t+h))}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\ &= P(X \geq h). \end{aligned}$$

Définition:

L'espérance mathématique (lorsqu'elle existe) d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle $[0; +\infty[$ est :

$$E(X) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t xf(x)dx$$

Théorème:

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . Son espérance mathématique est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Démonstration:

Soit $I(t)$ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $I(t) = \int_0^t x \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Posons $u'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ et $v(x) = x$. On a alors $u(x) = -e^{-\lambda x}$ et $v'(x) = 1$. De plus, u et v sont continues, dérivables et de dérivées continues sur $[0; +\infty[$ donc on peut effectuer une intégration par parties et :

$$\begin{aligned} I(t) &= [-xe^{-\lambda x}]_0^t - \int_0^t -e^{-\lambda x} dx \\ &= -te^{-\lambda t} - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^t \\ &= -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\lambda t e^{-\lambda t} = 0$ pour $\lambda > 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{1}{\lambda}$