Loi uniforme

Exercice 1:

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[a;b]$ lorsque sa densité f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad x \in [a;b] \\ 0 & si \quad x \notin [a;b] \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Tracer la courbe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $P(c \leq X \leq d)$ pour c et d deux réels de l'intervalle $[a;b]$.

Exercice 2:

A partir de 7 heures, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt A. Un usager se présente en A entre 7 h 00 et 7 h 30. On fait l'hypothèse que la durée de 7 h 00 à l'heure d'arrivé en A est une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;30]$. Quelle est la probabilité qu'il attende le prochain bus :

1. moins de cinq minutes ?
2. plus de 10 minutes ?

Exercice 3:

Deux amis, Sofiane et Yanis, se donnent rendez-vous entre 19h30 et 20h30 dans un bar. Sofiane décide d'arriver à 20h00, Yanis arrive par contre au hasard entre 19h30 et 20h30 ?

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X égale à l'heure d'arrivée de Yanis ?
2. Calculer la probabilité que Yanis arrive avant Sofiane ?
3. Calculer la probabilité que Sofiane attende plus d'un quart d'heure ?

Exercice 4:

Olivier et Karine décident de se retrouver au café de l'hôtel de Ville entre 7h00 et 8h00. Les instants arrivée d'Olivier et Karine sont assimilés à des variables aléatoires de loi uniforme sur $[0;1]$. Chacun attend un quart d'heure mais jamais au-delà de 8h00. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

Exercice 5:

On définit l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle fermé $[a;b]$ par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

1. Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X qui a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0;1] \\ 0 & si \quad x \notin [0;1] \end{cases}$$