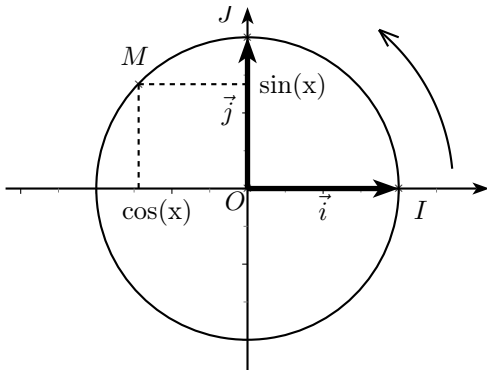


Chapitre 13: Fonctions trigonométriques

1 Définition

Définition:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Le sens trigonométrique, ou sens positif, est le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Remarque:

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour rayon 2π .

Soit $x \in \mathbb{R}$, en partant de I et en se plaçant sur $\mathcal{C}$, on parcourt un chemin de longueur $|x|$ en tournant :

Dans le sens positif si $x > 0$;

Dans le sens négatif si $x < 0$.

On aboutit ainsi à un point M du cercle $\mathcal{C}$, associé de manière unique à x .

Définition:

La fonction cosinus, notée $\cos$, est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , $\cos(x) = \text{abscisse de } M(x)$

La fonction sinus, notée $\sin$, est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , $\sin(x) = \text{ordonnée de } M(x)$

2 Propriétés

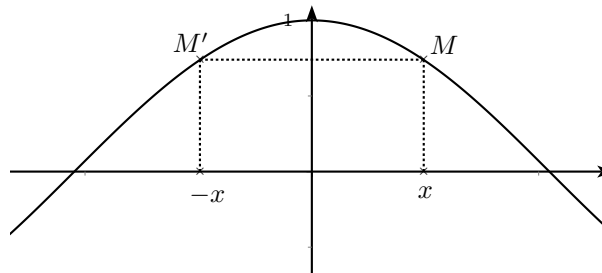
Propriété:

- Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$: on dit que la fonction cosinus est **paire**.
- Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin(x)$: on dit que la fonction sinus est **impaire**.

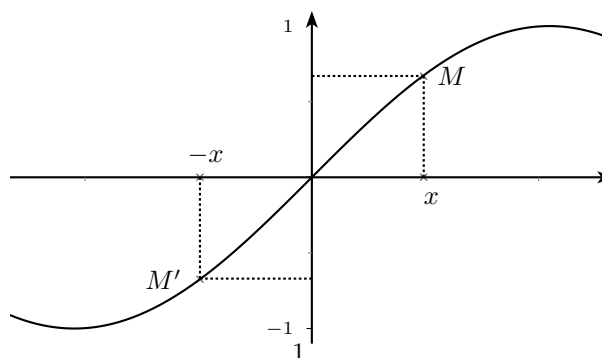
Interprétation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Les points $M(x; \cos(x))$ et $M'(-x; \cos(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. La courbe représentative de la fonction cosinus est donc symétrique par rapport à cet axe.



- Les points $M(x; \sin(x))$ et $M'(-x; \sin(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine. La courbe représentative de la fonction sinus est donc symétrique par rapport à l'origine.



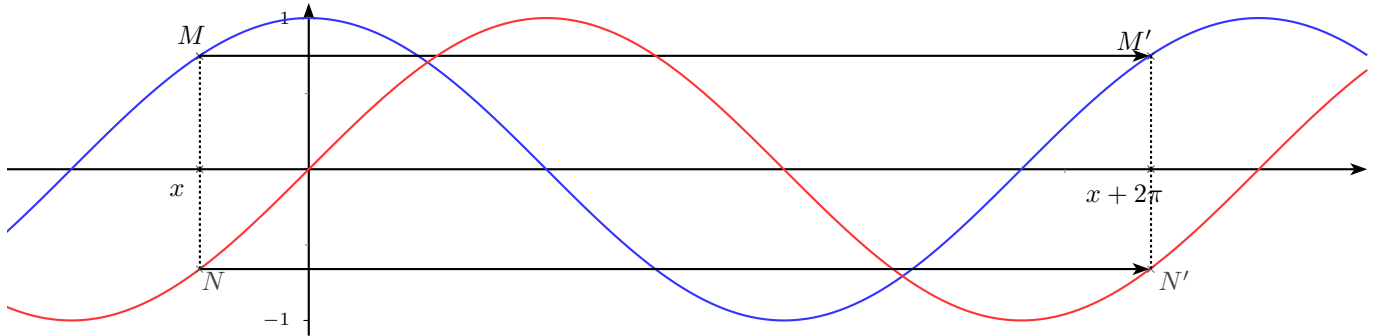
Propriété:

Pour tout réel x , $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$. On dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π .

Interprétation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points $M(x; \cos(x))$ et $M'(x + 2\pi; \cos(x + 2\pi))$ vérifient $\overrightarrow{MM'} = 2\pi \vec{i}$ et les points $N(x; \sin(x))$ et $N'(x + 2\pi; \sin(x + 2\pi))$ vérifient $\overrightarrow{NN'} = 2\pi \vec{i}$. Pour étudier les fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$, il suffit de les étudier sur un intervalle de longueur 2π .

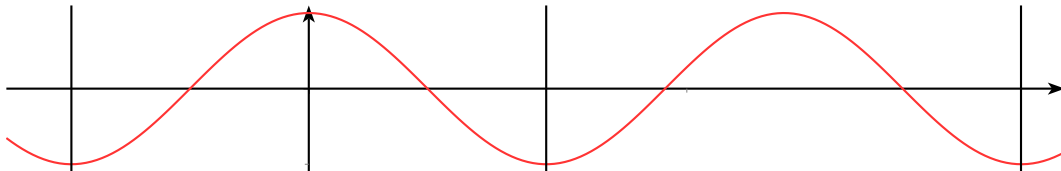


3 Étude de la fonction cosinus

La fonction cosinus est périodique de période 2π , il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ pour en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$. On rappelle que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$ donc :

x	$-\pi$	0	π
$-\sin(x)$	$+$	0	$-$
$\cos(x)$			

En utilisant les propriétés de parité et de périodicité de la fonction cosinus, on peut tracer la courbe de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$:



4 Étude de la fonction sinus

La fonction sinus est périodique de période 2π , il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ pour en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$. On rappelle que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x) = \cos(x)$ donc :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	$-$	0	$+$	0
$\sin(x)$				

En utilisant les propriétés de parité et de périodicité de la fonction sinus, on peut tracer la courbe de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$:

