

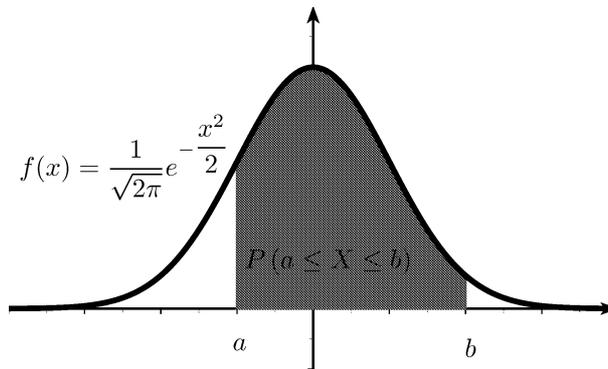
Chapitre 14: Lois normales

1 Loi normale centrée réduite

Définition:

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ si, pour tous réels a et b , tels que $a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



On dit que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$

Propriété:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. X admet donc f pour densité et :

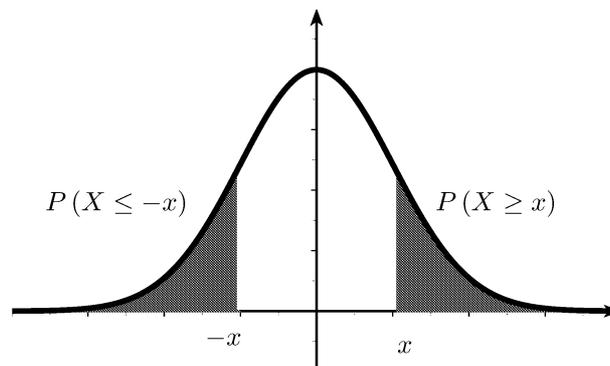
- L'aire totale sous la courbe de f est égale à 1, c'est à dire $P(X \in \mathbb{R}) = 1$;
- La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (on dit que f est paire) ;
- $E(X) = 0$; $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$.

Comme \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on peut démontrer que :

Propriété:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$:

- $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 0,5$;
- Pour tout réel x , $P(X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$;



- Pour tout réel x , $P(-x \leq X \leq x) = 1 - 2P(X \geq x) = 2P(X \leq x) - 1$;

Théorème:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Pour tout réel $\alpha \in]0; 1[$, il existe un **unique** nombre strictement positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Démonstration:

Soit Φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Cette fonction fait correspondre à un réel x l'aire sous la courbe de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty; x]$. De plus,

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

Soit $\alpha \in]0; 1[$, on cherche un nombre x strictement positif tel que $P(-x \leq X \leq x) = 1 - \alpha$. On a :

$$P(-x \leq X \leq x) = 2P(X \leq x) - 1 \iff 1 - \alpha = 2\Phi(x) - 1 \iff \Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Démontrer ce théorème revient à montrer que l'équation $\Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ admet une unique solution pour $\alpha \in]0; 1[$. Or la fonction Φ a les propriétés ci-dessous :

- Φ est strictement croissante sur \mathbb{R} ;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$

On peut ainsi résumer ces propriétés dans le tableau de variation ci-dessous :

x	0	$+\infty$
$\Phi(x)$	$\frac{1}{2}$	1

Or pour $\alpha \in]0; 1[$, $1 - \frac{\alpha}{2} \in]\frac{1}{2}; 1[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $u_\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

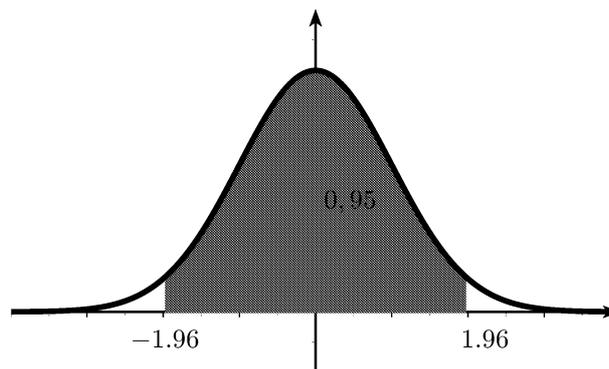
Remarque:

Ainsi u_α est l'unique antécédent de $\Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ donc $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

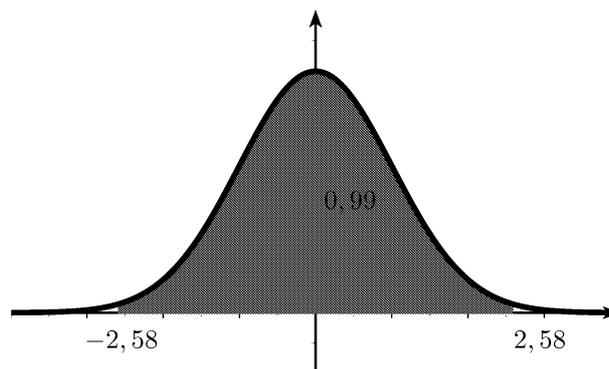
Exemples:

Le théorème ci-dessus permet d'obtenir les résultats suivants (à connaître) :

- $u_{0,05} \simeq 1,96$ donc $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \simeq 0,95$



- $u_{0,01} \simeq 2,58$ donc $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \simeq 0,99$



2 Loi normale générale

Définition:

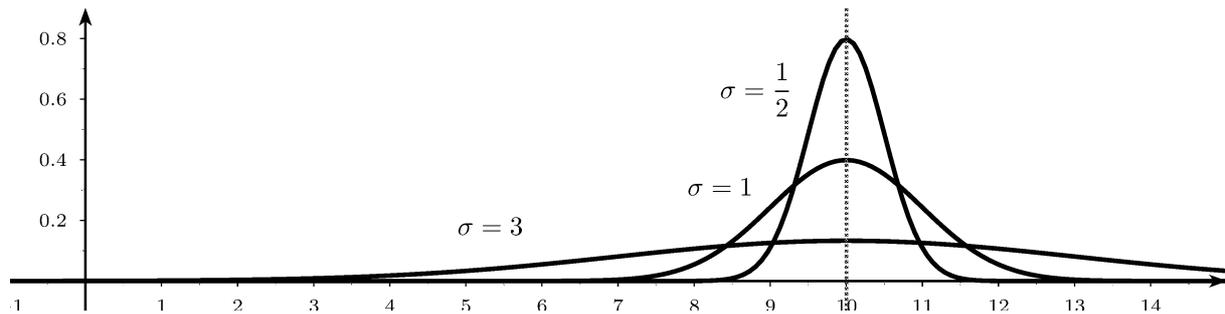
Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ si la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ où σ est un réel strictement positif.

Propriété:

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors $E(X) = \mu$; $V(X) = \sigma^2$ et $\sigma(X) = \sigma$.

Exemples:

La densité de probabilité de X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ est représentée par une « courbe en cloche » dont l'axe de symétrie a pour axe $x = \mu$ et qui est plus ou moins étirée selon les valeurs prises par σ . Pour $\mu = 10$, on a tracé ci-dessous la densité de X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ pour trois valeurs différentes de σ :



Propriété:

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors on a :

- $P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]) \simeq 0,68$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]) \simeq 0,95$
- $P(X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]) \simeq 0,997$

3 Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème: (de Moivre-Laplace)

Soit, pour tout entier n , une variable aléatoire X_n qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X)} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, la variable centrée réduite associée à X_n . Alors pour tous nombres a et b tels que $a \leq b$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Remarque:

Ce théorème dit que pour de grandes valeurs de n , la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est très « proche » de la loi normale de même espérance np et de même variance $np(1-p)$.

Pour pouvoir approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ avec une erreur minime, on fixe les conditions suivantes sur n et p :

$$n \geq 30 \quad ; \quad np \geq 5 \quad ; \quad n(1-p) \geq 5$$