Chapitre 1: Suites I

1 Limite d'une suite

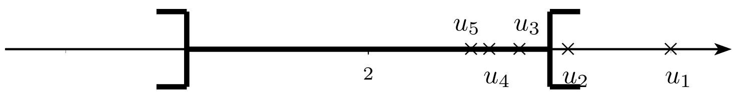
1.1 Limite finie

Définition:
On dit que la suite (u_n) a pour limite le nombre réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ de terme général $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$.

Pour $h = 0,4$, tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = 3$ sont compris dans l'intervalle $]2 - 0,4; 2 + 0,4[=]1,6; 2,4[$.



Dans cet exemple, quelque soit $h > 0$, tout intervalle de la forme $]2 - h; 2 + h[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge vers 2.

Remarques:
- *Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.*
- *On dit que la suite (u_n) est convergente de limite l ou qu'elle converge vers l.*

1.2 Limite infinie et suite divergente

Définition:
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2$.

Soit $A > 0$ un nombre réel positif, tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0 tel que $n_0 > \sqrt{A}$. En effet :

$$u_n > A \iff n^2 > A \iff n > \sqrt{A}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Définition:
Une suite (u_n) est dite divergente si elle n'est pas convergente vers un réel l.

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = -1 \quad ; \quad u_3 = 1 \quad ; \quad \ldots$$

Cette suite est alternée, elle ne converge vers aucun réel mais n'a pas non plus pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

Remarque:
Il y a deux types de suites divergentes :
- *celles qui n'ont aucune limite ;*
- *celles qui ont pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.*

2 Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites dont on connait la limite. La question légitime que l'on peut se poser est :

Les suites $(u_n + v_n)$, $(u_n \times v_n)$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ont-elles une limite et si oui quelle est-elle ?

2.1 Limite d'une somme

Théorème:
Dans le tableau suivant, l et l' sont deux nombres réels.

Si (u_n) a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*FI*

*FI signifie **forme indéterminée**, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de $(u_n + v_n)$.*

2.2 Limite d'un produit

Théorème:
Dans le tableau suivant, l et l' sont deux nombres réels non-nuls.

Si (u_n) a pour limite	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

2.3 Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

- $\boxed{\text{le dénominateur a une limite non-nul :}}$

Théorème:
Dans le tableau suivant, l et l' sont deux nombres réels non-nuls..

Si (u_n) a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si (v_n) a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

- $\boxed{\text{le dénominateur a une limite nul :}}$

Théorème:
Dans le tableau suivant, l est un nombre réel non-nul.

Si (u_n) a pour limite	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
et si (v_n) a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

2.4 Formes indéterminées

D'après ce qui a été vu précédemment, on compte quatre formes indéterminés :

$$"\infty - \infty" \qquad "0 \times \infty" \qquad "\frac{\infty}{\infty}" \qquad "\frac{0}{0}"$$

Dans ce cas, il faut faire une étude particulière pour "lever l'indétermination".

3 Limites et comparaison

Théorème:
Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait :*

$$u_n \leq v_n$$

- *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ *;*
- *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème: (Des gendarmes)
Soit (u_n), (v_n) *et* (w_n) *trois suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait :*

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \qquad , \qquad \lim_{n \to +\infty} w_n = l$$

où l *est un nombre réel alors la suite* (v_n) *est convergente et sa limite est* l *également.*