

Restitution Organisée de Connaissance (R.O.C.)

Version finale!

Les démonstrations suivantes sont classées dans l'ordre du programme officiel en deux catégories : les démonstrations exigibles (qui peuvent être demandées au baccalauréat) au nombre de dix et les démonstrations présentées dans les commentaires du programme (qui ne peuvent sans doute pas être demandées au baccalauréat...) au nombre de sept.

1 Démonstrations exigibles

R.O.C. 1:

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration:

- Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n , $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq v_n$;
- Soit $A > 0$ un réel fixé.
La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ donc l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un rang n_1 ;

Si on considère $n_2 = \max(n_0, n_1)$ alors pour tout entier n , $n \geq n_2$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) donc la suite (v_n) a pour limite $+\infty$.

R.O.C. 2:

Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Démonstration:

Soit $q > 1$ alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

pour n entier naturel, soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété

$$q^n \geq 1 + na$$

Initialisation : Pour $n = 0$, $q^0 = 1$ et $1 + 0.a = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n donné. Par hypothèse de récurrence :

$$q^n \geq 1 + na$$

donc

$$q^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$$

puisque $(1 + a) = q > 0$

$$q^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$$

et $na^2 \geq 0$ donc

$$q^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$$

La propriété $\mathcal{P}(n + 1)$ est alors vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $q^n \geq 1 + na$ pour tout entier n .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$ pour $a > 0$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

R.O.C. 3:

Il existe une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$(E) : \begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Démonstration:

L'existence d'une telle fonction est admise, montrons que celle-ci est unique.

- Montrons d'abord que si f vérifie (E) alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, on introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0 \text{ car } f' = f.$$

La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = g(0) = f(0)f(0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel x_0 vérifiant $f(x_0) = 0$, on aurait alors $g(x_0) = 1 = f(x_0)f(-x_0) = 0$ soit $1 = 0$ ce qui est absurde donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

- Soit f_1 et f_2 deux fonctions vérifiant (E), posons $q = \frac{f_1}{f_2}$.

Par ce qui précède f_2 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc q est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions dérivables.

$$\text{De plus, } \left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2} = \frac{f_1f_2 - f_1f_2}{f_2^2} = 0.$$

La fonction q est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $q(x) = q(0) = \frac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$: on a donc montré que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ c'est à dire qu'il existe une unique fonction vérifiant (E).

R.O.C. 4:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Démonstration:

Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, on étudie la fonction $h(x) = e^x - x$.

h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $h'(x) = e^x - 1$.

$x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $h'(0) = 0$ donc $h'(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ soit h est croissante sur $[0; +\infty[$.

Or $h(0) = 1$ donc $h(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ soit $e^x > x$ sur $[0; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ on effectue un changement de variable.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty. \text{ Posons } X = -x, \text{ on a alors } e^x = e^{-X} \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

R.O.C. 5:

Si une droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$ alors elle est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

Démonstration:

Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes en A du plan $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Ces vecteurs sont non-nuls et non-colinéaires donc le plan $\mathcal{P}$ est définie par A , $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Ainsi pour toute droite d du plan $\mathcal{P}$ de vecteur directeur $\vec{v}$, il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$$

Δ est orthogonale à d_1 et d_2 donc son vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ soit $\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$ donc

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) \cdot \vec{n} = a\vec{u}_1 \cdot \vec{n} + b\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$$

donc Δ est orthogonale à d . (CQFD)

R.O.C. 6:

Dans un repère orthonormé :

- Si $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$;
- Si a, b et c sont trois nombres réels non tous nuls alors l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Démonstration:

- Si $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ alors $\vec{n}$ est non-nul. Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz + d = 0$$

avec $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Ainsi $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

- Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b et c sont trois nombres réels non tous nuls. Supposons $a \neq 0$ alors le point $A\left(\frac{-d}{a}; 0; 0\right) \in \mathcal{E}$ et

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = ax + by + cz + d = 0$$

Ainsi $M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ donc $\mathcal{E}$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

R.O.C. 7:

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont deux événements indépendants.

Démonstration:

D'après la formule des probabilités totales, $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$ donc

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Or A et B sont indépendants d'où

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A)P(B) \\ P(\bar{A} \cap B) &= (1 - P(A)) \times P(B) \\ P(\bar{A} \cap B) &= P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

On en déduit que $\bar{A}$ et B sont deux événements indépendants.

R.O.C. 8:

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . Son espérance mathématique est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Démonstration:

Soit $I(t)$ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $I(t) = \int_0^t x \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Posons $u'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ et $v(x) = x$. On a alors $u(x) = -e^{-\lambda x}$ et $v'(x) = 1$. De plus, u et v sont continues, dérivables et de dérivées continues sur $[0; +\infty[$ donc on peut effectuer une **intégration par parties** et :

$$\begin{aligned} I(t) &= [-xe^{-\lambda x}]_0^t - \int_0^t -e^{-\lambda x} dx \\ &= -te^{-\lambda t} - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^t \\ &= -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\lambda te^{-\lambda t} = 0$ pour $\lambda > 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{1}{\lambda}$

R.O.C. 9:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Pour tout réel $\alpha \in]0; 1[$, il existe un **unique** nombre strictement positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Démonstration:

Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Cette fonction fait correspondre à un réel x l'aire sous la courbe de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; x]$. De plus,

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

Soit $\alpha \in]0; 1[$, on cherche un nombre x strictement positif tel que $P(-x \leq X \leq x) = 1 - \alpha$. On a :

$$P(-x \leq X \leq x) = 2P(X \leq x) - 1 \iff 1 - \alpha = 2\Phi(x) - 1 \iff \Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Démontrer ce théorème revient à montrer que l'équation $\Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ admet une unique solution pour $\alpha \in]0; 1[$. Or la fonction Φ a les propriétés ci-dessous :

• Φ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$;

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$

On peut ainsi résumer ces propriétés dans le tableau de variation ci-dessous :

x	0	$+\infty$
$\Phi(x)$	$\frac{1}{2}$	1

Or pour $\alpha \in]0; 1[$, $1 - \frac{\alpha}{2} \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $u_\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

R.O.C. 10:

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et $F_n = \frac{X_n}{n}$.

Soit $\alpha \in]0; 1[$ et u_α le réel tel que $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$$

où

$$I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Démonstration:

Soit $\alpha \in]0; 1[$ et u_α le réel tel que $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. D'après le théorème de Moivre-Laplace, si X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

or

$$-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha \iff -u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \iff p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n \in I_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

2 Autres démonstrations

R.O.C. 11:

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration:

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

- (u_n) est non-majorée donc pour tout réel $A > 0$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$;
- (u_n) est croissante donc pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > A$.

Ainsi, quelque soit $A > 0$, il existe n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n_0} > A$ ce qui revient à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

R.O.C. 12:

Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite l alors pour tout entier naturel n , $u_n \leq l$

Démonstration:

Supposons (par l'absurde) qu'il existe un terme de la suite noté u_{n_0} tel que $u_{n_0} > l$.

Posons $d = |u_{n_0} - l|$. Par construction, $u_{n_0} > l + \frac{d}{2}$ et (u_n) est croissante donc l'intervalle ouvert $\left] l - \frac{d}{2}; l + \frac{d}{2} \right[$ contient uniquement les termes de la suite pour $n < n_0$ soit un nombre fini ce qui contredit la définition de la limite l . Ainsi, tout entier naturel n , $u_n \leq l$.

R.O.C. 13:

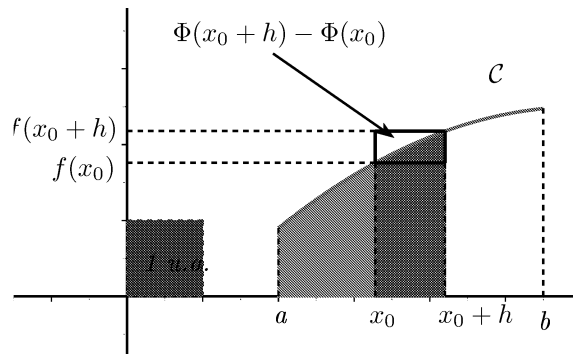
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(x)dx$ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$

Démonstration:

On se place dans le cas où f est croissante sur $[a; b]$. Soit x_0 et h deux nombres tels que $x_0 \in [a; b]$, $x_0 + h \in [a; b]$ et $h \neq 0$.

Si $h > 0$, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$. De plus, $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$ exprime l'aire sous C sur $[x_0; x_0 + h]$ donc l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$ d'où :

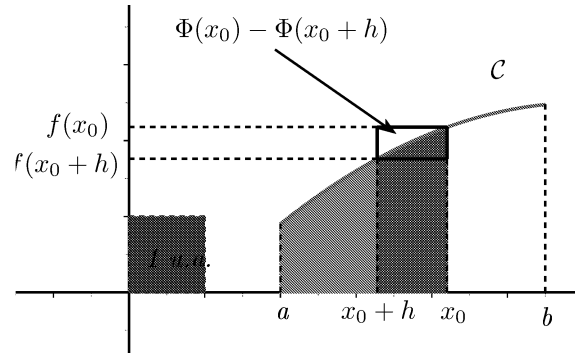
$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$



et comme h est non-nul et positif, on obtient : $f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$

Si $h < 0$, comme f est croissante, $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$. De plus, $\Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h)$ exprime l'aire sous C sur $[x_0 + h; x_0]$ donc l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire des rectangles de largeur $-h$ et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$ d'où :

$$-h \times f(x_0 + h) \leq \Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h) \leq -h \times f(x_0)$$



et comme h est non-nul et négatif, on obtient en divisant par $-h$ qui est positif : $f(x_0 + h) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$
 Par continuité de f en x_0 , on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Ainsi Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ pour tout réel x_0 de $[a; b]$ donc Φ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$

R.O.C. 14:

Toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet des primitives sur $[a; b]$.

Démonstration:

On admet que toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet un minimum m et un maximum M .

Soit donc f une fonction continue sur $[a; b]$. Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ sur $[a; b]$ donc la fonction $h(x) = f(x) - m$ est une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

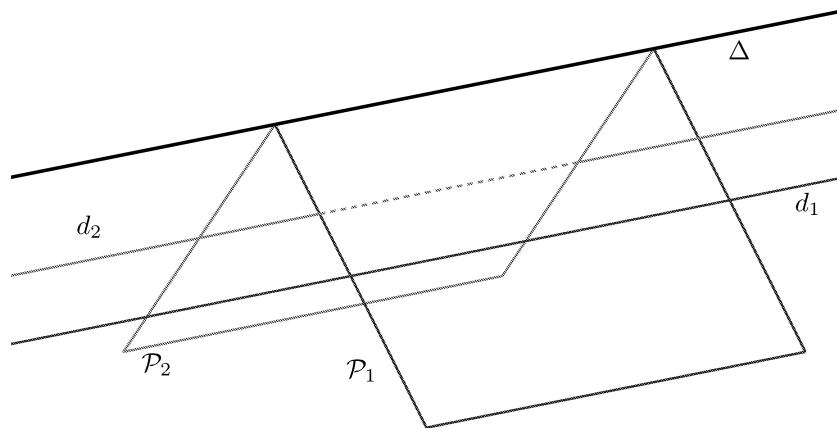
D'après le théorème précédent, h admet une primitive Φ sur $[a; b]$, avec $\Phi'(x) = h(x)$.

Posons donc $F(x) = \Phi(x) + mx$.

F est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[a; b]$

R.O.C. 15:

Soit d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en une droite Δ alors d_1 et d_2 sont parallèles à Δ .



Démonstration:

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d_1 , comme d_1 et d_2 sont parallèles, $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d_2 .

Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ , l'objectif de la démonstration est de montrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

On considère donc $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}_1$ et $(\vec{u}, \vec{t})$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}_2$. Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en Δ , le vecteur $\vec{w}$ peut se décomposer de deux manières différentes :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{t}$$

donc

$$(a - c)\vec{u} = d\vec{t} - b\vec{v}$$

Si $a \neq c$ alors $\vec{u}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires ce qui contredit le fait que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ soient sécants d'où $a = c$.

On en déduit donc que $d\vec{t} = b\vec{v}$ soit que $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont colinéaires ce qui contredit là encore fait que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ soient sécants d'où $d = b = 0$.

On obtient donc que $\vec{w} = a\vec{u}$ donc d_1 et d_2 sont parallèles à Δ .

R.O.C. 16:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$P_{X>t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$$

On dit que une loi exponentielle est sans vieillissement ou sans mémoire.

Démonstration:

Soit $t > 0$ fixé et $h > 0$, la probabilité que $X \geq t+h$ sachant que $X \geq h$ est égale à :

$$\begin{aligned} P_{X \geq t}(X \geq t+h) &= \frac{P((X \geq h) \cap (X \geq t+h))}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geq h). \end{aligned}$$

R.O.C. 17:

Soit F_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe la fréquence du caractère dans cet échantillon. La proportion p inconnue du caractère dans la population est telle que :

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0,95$$

Démonstration:

On sait que (vu en seconde) que $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq f \leq p_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0,95$. Or :

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \iff -F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq -p \leq -F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \iff F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq p \geq F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

donc

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0,95$$