

# Restitution Organisée de Connaissance (R.O.C.)

02/12/2013

## R.O.C. 1:

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que :

- à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ;

alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

### Démonstration:

- Il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout entier  $n$ ,  $n \geq n_0$ , on a :  $u_n \leq v_n$  ;
- Soit  $A > 0$  un réel fixé.  
La suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$  donc l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un rang  $n_1$  ;

Si on considère  $n_2 = \max(n_0, n_1)$  alors pour tout entier  $n$ ,  $n \geq n_2$ , l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite  $(v_n)$  donc la suite  $(v_n)$  a pour limite  $+\infty$ .

## R.O.C. 2:

Si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

### Démonstration:

Soit  $q > 1$  alors  $q = 1 + a$  avec  $a > 0$ .

pour  $n$  entier naturel, soit  $\mathcal{P}(n)$ , la propriété

$$q^n \geq 1 + na$$

**Initialisation** : Pour  $n = 0$ ,  $q^0 = 1$  et  $1 + 0.a = 1$  donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité** : Supposons que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour un entier naturel  $n$  donné. Par hypothèse de récurrence :

$$q^n \geq 1 + na$$

donc

$$q^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$$

puisque  $(1 + a) = q > 0$

$$q^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$$

et  $na^2 \geq 0$  donc

$$q^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$$

La propriété  $\mathcal{P}(n + 1)$  est alors vraie.

**Conclusion** : D'après le principe de récurrence,  $q^n \geq 1 + na$  pour tout entier  $n$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$  pour  $a > 0$  donc d'après le théorème de comparaison  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

## R.O.C. 3:

Si une suite  $(u_n)$  est croissante et non majorée alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

### Démonstration:

Soit  $(u_n)$  une suite croissante et non majorée.

- $(u_n)$  est non-majorée donc pour tout réel  $A > 0$ , il existe  $n_q$  tel que  $u_{n_q} > A$  ;

- $(u_n)$  est croissante donc pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $u_n > A$ .

Ainsi, quelque soit  $A > 0$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $u_n > A$  ce qui revient à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

#### R.O.C. 4:

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants alors  $\bar{A}$  et  $B$  sont deux événements indépendants.

#### Démonstration:

D'après la formule des probabilités totales,  $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$  donc

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Or  $A$  et  $B$  sont indépendants d'où

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A)P(B) \\ P(\bar{A} \cap B) &= (1 - P(A)) \times P(B) \\ P(\bar{A} \cap B) &= P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

On en déduit que  $\bar{A}$  et  $B$  sont deux événements indépendants.

#### R.O.C. 5:

Il existe une et une seule fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant :

$$(E) : \begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

#### Démonstration:

L'existence d'une telle fonction est admise, montrons que celle-ci est unique.

- Montrons d'abord que si  $f$  vérifie (E) alors  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

Pour cela, on introduit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x)f(-x)$ .

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0 \text{ car } f' = f.$$

La fonction  $g$  est donc constante sur  $\mathbb{R}$  et  $g(x) = g(0) = f(0)f(0) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel  $x_0$  vérifiant  $f(x_0) = 0$ , on aurait alors  $g(x_0) = 1 = f(x_0)f(-x_0) = 0$  soit  $1 = 0$  ce qui est absurde donc  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

- Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions vérifiant (E), posons  $q = \frac{f_1}{f_2}$ .

Par ce qui précède  $f_2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  donc  $q$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , comme quotient de fonctions dérivables.

$$\text{De plus, } \left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2} = \frac{f_1f_2 - f_1f_2}{f_2^2} = 0.$$

La fonction  $q$  est donc constante sur  $\mathbb{R}$  et  $q(x) = q(0) = \frac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$  : on a donc montré que  $f_1(x) = f_2(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  c'est à dire qu'il existe une unique fonction vérifiant (E).

#### R.O.C. 6:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

#### Démonstration:

Pour déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ , on étudie la fonction  $h(x) = e^x - x$ .

$h$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et  $h'(x) = e^x - 1$ .

$x \mapsto e^x$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  et  $h'(0) = 0$  donc  $h'(x) \geq 0$  sur  $[0; +\infty[$  soit  $h$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

Or  $h(0) = 1$  donc  $h(x) \geq 0$  sur  $[0; +\infty[$  soit  $e^x > x$  sur  $[0; +\infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  donc d'après le théorème de comparaison

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Pour déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$  on effectue un changement de variable.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty. \text{ Posons } X = -x, \text{ on a alors } e^x = e^{-X} \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$