Restitution Organisée de Connaissance (R.O.C.)

11/09/2013

R.O.C. 1:
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :
- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$;
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;

alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Démonstration:
- *Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n, $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq v_n$;*
- *Soit $A > 0$ un réel fixé.*
  La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ donc l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un rang n_1 ;

Si on considère $n_2 = max(n_0, n_1)$ alors pour tout entier n, $n \geq n_2$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) donc la suite (v_n) a pour limite $+\infty$.

R.O.C. 2:
Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Démonstration:
Soit $q > 1$ alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

pour n entier naturel, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$q^n \geq 1 + na$$

Initialisation : *Pour $n = 0$, $q^0 = 1$ et $1 + 0.a = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*

Hérédité : *Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n donné. Par hypothèse de récurrence :*

$$q^n \geq 1 + na$$

donc

$$q^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$$

puisque $1 + a = q > 0$

$$q^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$$

et $na^2 \geq 0$ donc

$$q^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.

Conclusion : *D'après le principe de récurrence, $q^n \geq 1 + na$ pour tout entier n.*

Or $\lim_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$ pour $a > 0$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.