

Restitution Organisée de Connaissance (R.O.C.)

16/09/2013

R.O.C. 1:

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration:

- Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n , $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq v_n$;
- Soit $A > 0$ un réel fixé.
La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ donc l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un rang n_1 ;

Si on considère $n_2 = \max(n_0, n_1)$ alors pour tout entier n , $n \geq n_2$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) donc la suite (v_n) a pour limite $+\infty$.

R.O.C. 2:

Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Démonstration:

Soit $q > 1$ alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

pour n entier naturel, soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété

$$q^n \geq 1 + na$$

Initialisation : Pour $n = 0$, $q^0 = 1$ et $1 + 0.a = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n donné. Par hypothèse de récurrence :

$$q^n \geq 1 + na$$

donc

$$q^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$$

puisque $(1 + a) = q > 0$

$$q^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$$

et $na^2 \geq 0$ donc

$$q^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$$

La propriété $\mathcal{P}(n + 1)$ est alors vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $q^n \geq 1 + na$ pour tout entier n .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$ pour $a > 0$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

R.O.C. 3:

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration:

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

- (u_n) est non-majorée donc pour tout réel $A > 0$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$;

-
- (u_n) est croissante donc pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > A$.

Ainsi, quelque soit $A > 0$, il existe n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n_0} > A$ ce qui revient à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

R.O.C. 4:

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont deux événements indépendants.

Démonstration:

D'après la formule des probabilités totales, $P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$ donc

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Or A et B sont indépendants d'où

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A)P(B) \\ P(\overline{A} \cap B) &= (1 - P(A)) \times P(B) \\ P(\overline{A} \cap B) &= P(\overline{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

On en déduit que $\overline{A}$ et B sont deux événements indépendants.