Restitution Organisée de Connaissance (R.O.C.)

27/03/2014

R.O.C. 1:
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$;

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration:

- *Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n, $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq v_n$;*
- *Soit $A > 0$ un réel fixé.*
  La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ donc l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un rang n_1 ;

Si on considère $n_2 = max(n_0, n_1)$ alors pour tout entier n, $n \geq n_2$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) donc la suite (v_n) a pour limite $+\infty$.

R.O.C. 2:
Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Démonstration:
Soit $q > 1$ alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

pour n entier naturel, soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété

$$q^n \geq 1 + na$$

Initialisation : *Pour $n = 0$, $q^0 = 1$ et $1 + 0.a = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*

Hérédité : *Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n donné. Par hypothèse de récurrence :*

$$q^n \geq 1 + na$$

donc

$$q^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$$

puisque $(1 + a) = q > 0$

$$q^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$$

et $na^2 \geq 0$ donc

$$q^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.
Conclusion : *D'après le principe de récurrence, $q^n \geq 1 + na$ pour tout entier n.*
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ pour $a > 0$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

R.O.C. 3:
Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration:
Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

- *(u_n) est non-majorée donc pour tout réel $A > 0$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$;*

- (u_n) *est croissante donc pour tout entier* $n \geq n_0$, $u_n > A$.

Ainsi, quelque soit $A > 0$, *il existe* n_0 *tel que pour tout entier* $n \geq n_0$, $u_{n_0} > A$ *ce qui revient à dire que*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

R.O.C. 4:

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont deux événements indépendants.

Démonstration:

D'après la formule des probabilités totales, $P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$ *donc*

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Or A *et* B *sont indépendants d'où*

$$\begin{array}{rcl} P(\overline{A} \cap B) & = & P(B) - P(A)P(B) \\ P(\overline{A} \cap B) & = & (1 - P(A)) \times P(B) \\ P(\overline{A} \cap B) & = & P(\overline{A}) \times P(B) \end{array}$$

On en déduit que $\overline{A}$ *et* B *sont deux événements indépendants.*

R.O.C. 5:

Il existe une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$(E) : \left\{ \begin{array}{l} f' = f \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$$

Démonstration:

L'existence d'une telle fonction est admise, montrons que celle-ci est unique.

- *Montrons d'abord que si* f *vérifie* (E) *alors* f *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$.
  Pour cela, on introduit la fonction g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = f(x)f(-x)$.
  g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

  $$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0 \text{ car } f' = f.$$

  La fonction g *est donc constante sur* $\mathbb{R}$ *et* $g(x) = g(0) = f(0)f(0) = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
  Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel x_0 *vérifiant* $f(x_0) = 0$, *on aurait alors* $g(x_0) = 1 = f(x_0)f(-x_0) = 0$ *soit* $1 = 0$ *ce qui est absurde donc* f *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$.
- *Soit* f_1 *et* f_2 *deux fonctions vérifiant* (E), *posons* $q = \dfrac{f_1}{f_2}$.
  Par ce qui précède f_2 *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$ *donc* q *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *comme quotient de fonctions dérivables.*
  De plus, $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)' = \dfrac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2} = \dfrac{f_1f_2 - f_1f_2}{f_2^2} = 0$.
  La fonction q *est donc constante sur* $\mathbb{R}$ *et* $q(x) = q(0) = \dfrac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$ *: on a donc montré que* $f_1(x) = f_2(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *c'est à dire qu'il existe une unique fonction vérifiant* (E).

R.O.C. 6:

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Démonstration:

Pour déterminer $\lim_{x \to +\infty} e^x$, *on étudie la fonction* $h(x) = e^x - x$.

h *est dérivable sur* $[0; +\infty[$ *et* $h'(x) = e^x - 1$.

$x \longmapsto e^x$ *est strictement croissante sur* $[0; +\infty[$*et* $h'(0) = 0$ *donc* $h'(x) \geq 0$ *sur* $[0; +\infty[$ *soit* h *est croissante sur* $[0; +\infty[$.

Or $h(0) = 1$ *donc* $h(x) \geq 0$ *sur* $[0; +\infty[$ *soit* $e^x > x$ *sur* $[0; +\infty[$ *et* $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ *donc d'après le théorème de comparaison*

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Pour déterminer $\lim_{x \to -\infty} e^x$ *on effectue un changement de variable.*

$\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$. *Posons* $X = -x$, *on a alors* $e^x = e^{-X}$ *et* $\lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$ *donc* $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

R.O.C. 7:

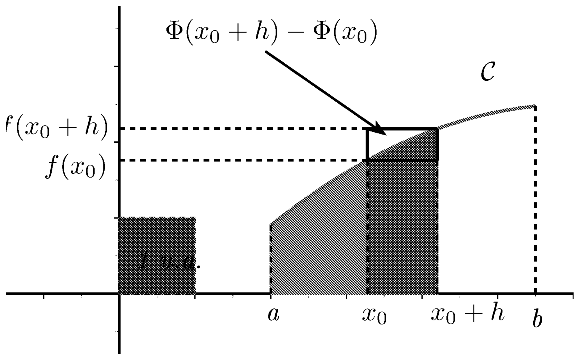
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction $\Phi : x \longmapsto \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\Phi' = f$

Démonstration:

On se place dans le cas où f est croissante sur $[a;b]$. Soit x_0 et h deux nombres tels que $x_0 \in [a,b]$, $x_0 + h \in [a;b]$ et $h \neq 0$.

Si $h > 0$, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0+h)$. De plus, $\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)$ exprime l'aire sous $\mathcal{C}$ sur $[x_0; x_0+h]$ donc l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ d'où :

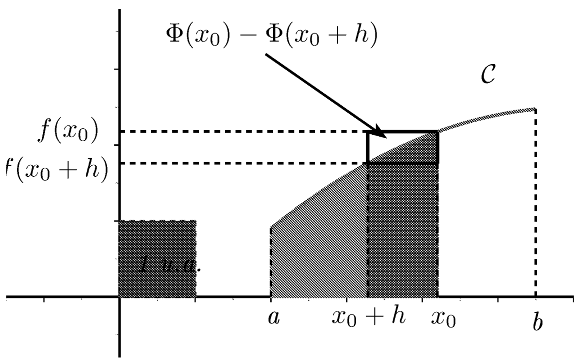
$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0+h)$$



et comme h est non-nul et positif, on obtient : $f(x_0) \leq \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$

Si $h < 0$, comme f est croissante, $f(x_0+h) \leq f(x_0)$. De plus, $\Phi(x_0) - \Phi(x_0+h)$ exprime l'aire sous $\mathcal{C}$ sur $[x_0+h; x_0]$ donc l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire des rectangles de largeur $-h$ et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ d'où :

$$-h \times f(x_0+h) \leq \Phi(x_0) - \Phi(x_0+h) \leq -h \times f(x_0)$$



et comme h est non-nul et négatif, on obtient en divisant par $-h$ qui est positif : $f(x_0+h) \leq \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$

Par continuité de f en x_0, on a $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Ainsi Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ pour tout réel x_0 de $[a;b]$ donc Φ est dérivable sur $[a;b]$ et $\Phi' = f$

R.O.C. 8:

Toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet des primitives sur $[a;b]$.

Démonstration:

On admet que toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet un minimum m et un maximum M.

Soit donc f une fonction continue sur $[a;b]$. Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ sur $[a;b]$ donc la fonction $h(x) = f(x) - m$ est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

D'après le théorème précédent, h admet une primitive Φ sur $[a;b]$, avec $\Phi'(x) = h(x)$.

Posons donc $F(x) = \Phi(x) + mx$.

F est dérivable sur $[a;b]$ et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[a;b]$

R.O.C. 9:
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$P_{X\geq t}\left(X \geq t+h\right) = P\left(X \geq h\right)$$

On dit que une loi exponentielle est sans vieillissement ou sans mémoire.

Démonstration:
Soit $t > 0$ fixé et $h > 0$, la probabilité que $X \geq t+h$ sachant que $X \geq h$ est égale à :

$$\begin{aligned} P_{X\geq t}(X \geq t+h) &= \frac{P((X \geq h) \cap (X \geq t+h))}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geq h). \end{aligned}$$

R.O.C. 10:
X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Son espérance mathématique est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Démonstration:
Soit $I(t)$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $I(t) = \displaystyle\int_0^t x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.
Posons $u'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ et $v(x) = x$. On a alors $u(x) = -e^{-\lambda x}$ et $v'(x) = 1$. De plus, u et v sont continues, dérivables et de dérivées continues sur $[0;+\infty[$ donc on peut effectuer une intégration par parties et :

$$\begin{aligned} I(t) &= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^t - \int_0^t -e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= -te^{-\lambda t} - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^t \\ &= -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

De plus, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\lambda te^{-\lambda t} = 0$ pour $\lambda > 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I(t) = \frac{1}{\lambda}$

R.O.C. 11:
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un **unique** nombre strictement positif u_α tel que :

$$P\left(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

Démonstration:
Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ Cette fonction fait correspondre à un réel x l'aire sous la courbe de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;x]$. De plus,

$$\Phi(x) = P\left(X \leq x\right)$$

Soit $\alpha \in]0;1[$, on cherche un nombre x strictement positif tel que $P\left(-x \leq X \leq x\right) = 1 - \alpha$. On a :

$$P\left(-x \leq X \leq x\right) = 2P\left(X \leq x\right) - 1 \Longleftrightarrow 1 - \alpha = 2\Phi(x) - 1 \Longleftrightarrow \Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Démontrer ce théorème revient à montrer que l'équation $\Phi(x) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ admet une unique solution pour $\alpha \in]0;1[$. Or la fonction Φ a les propriétés ci-dessous :

- *Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;*
- *$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$*

On peut ainsi résumer ces propriétés dans le tableau de variation ci-dessous :

x	0		$+\infty$
			1
$\Phi(x)$		$\nearrow$	
	$\frac{1}{2}$		

Or pour $\alpha \in]0;1[,\ 1-\dfrac{\alpha}{2} \in \left]\dfrac{1}{2};1\right[$ *donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique* $u_\alpha \in]0;+\infty[$ *tel que* $P\left(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha\right) = 1-\alpha$