Chapitre 2: Probabilités conditionnelles

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Définition et première propriété

Définition:
On suppose $P(B) \neq 0$. La probabilité de A sachant B noté $P_B(A)$ est définie par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

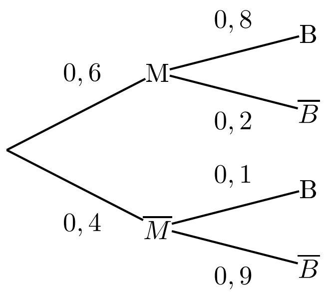
Propriété:
On suppose $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
- $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$;
- $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

Démonstration:
Le premier point découle immédiatement de la définition.
De plus, $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ *donc* $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

1.2 Exemple avec un arbre pondéré

On teste l'efficacité d'un médicament sur un échantillon d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Dans cette expérimentation, 60% des individus prennent le médicament, les autres reçoivent un placebo.
On étudie la baisse du taux de glycémie après l'expérimentation.
On constate une baisse de ce taux chez 80% des individus ayant pris le médicament ; on ne constate aucune baisse pour 90% des personnes ayant pris le placebo.
On choisit au hasard une personne dans l'ensemble des personnes ayant participé à l'expérience.
On appelle :
- M l'événement « l'individu a pris le médicament » ;
- B l'événement « l'individu a une baisse de son taux de glycémie ».

L'énoncé permet d'obtenir l'arbre pondéré suivant :



La probabilité que l'individu a une baisse de son taux de glycémie **sachant qu**'il a pris le médicament est :

$$P_M(B) = 0{,}8$$

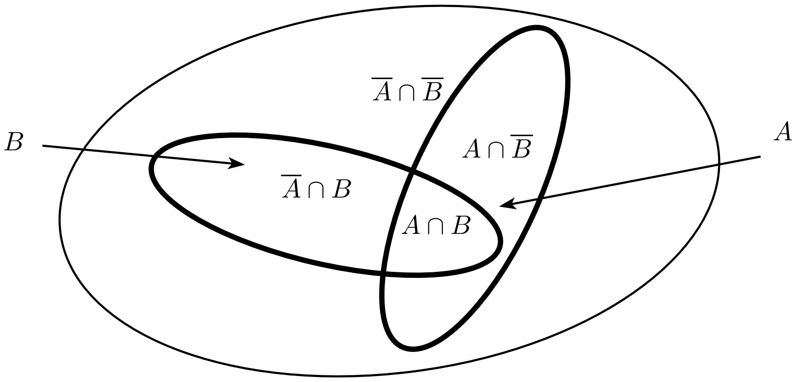
La probabilité que l'individu a une baisse de son taux de glycémie **et** a pris le médicament est :

$$P(M \cap B) = P(M) \times P_M(B) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$$

1.3 Formule des probabilités totales

Propriété:
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B})$.

Démonstration:
D'après le schéma ci-dessous, $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ avec $(A \cap B)$ et $(A \cap \overline{B})$ incompatibles.



On en déduit que :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

De plus, $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$ et $P(A \cap \overline{B}) = P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B})$ donc

$$P(A) = P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B})$$

Exemple:
Dans l'exemple précédent, la probabilité que l'individu a une baisse de son taux de glycémie est :

$$P(B) = P(B \cap M) + p(B \cap \overline{M}) = P(M) \times P_M(B) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(B) = 0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}48 + 0{,}04 = 0{,}52$$

2 Indépendance

Définition:
Soit A et B deux événements.
On dit que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété:
Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont deux événements indépendants.

Démonstration:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B \setminus A \cap B) \\ &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \end{aligned}$$

puisque A et B sont indépendants donc

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= (1 - P(A)) \times P(B) \\ &= P(\overline{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

On en déduit que $\overline{A}$ et B sont deux événements indépendants.

Propriété:
Si A et B sont de probabilité non nulle, A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ (ou $P_A(B) = P(B)$).

Remarque:
Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un des deux événements n'influence pas les chances que l'autre se réalise.