

## Convergence des suites monotones

**Exercice 1:**

Montrer que la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \frac{4n-4}{n^2+3}$  est bornée.

**Théorème: (admis)**

- Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

**Exercice 2:**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$ .

1. À l'aide de la calculatrice, observer le comportement de cette suite.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n$ ,  $u_n > 0$ .
3. Démontrer que la suite est décroissante.
4. Conclure.

**Exercice 3:**

Démontrer le théorème ci-dessous :

Si une suite  $(u_n)$  est croissante et non majorée alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Exercice 4:**

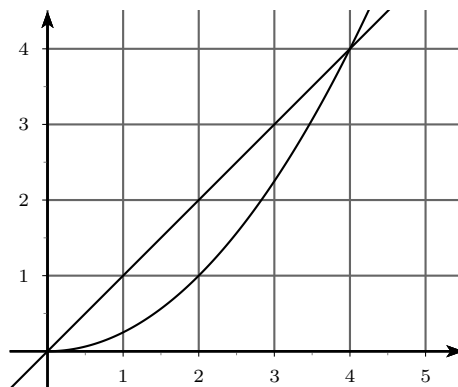
Démontrer le théorème ci-dessous :

Si une suite  $(u_n)$  est croissante et admet pour limite  $l$  alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq l$ .

**Exercice 5:**

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$ .

1. On a tracé ci-dessous la courbe d'équation  $y = \frac{1}{4}x^2$  et la droite d'équation  $y = x$ . Placer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .



2. Montrer, par récurrence, que pour tout  $n \geq 0$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$
3. Étudier le sens de variations de la suite  $(u_n)$ .
4.  $(u_n)$  converge-t-elle?

**Exercice 6:**

La suite  $(u_n)$  est définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = \frac{8u_n + 3}{u_n + 6}$ .

1. Construire le tableau de variations de la fonction  $f : x \mapsto \frac{8x+3}{x+6}$  sur  $[1; 3]$ .
2. Démontrer par récurrence que  $1 \leq u_n \leq 3$  pour  $n \geq 1$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
4.  $(u_n)$  converge-t-elle?