# Chapitre 4: Fonctions et limites

## 1 Limite à l'infini

## 2 Limite en un réel $a$

# 3 Opérations sur les limites

## 3.1 Limite d'une somme

**Théorème:**
*Dans le tableau suivant, $l$ et $l'$ sont deux réels. $a$ est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.*

| *Si la limite de $f$ en $a$ est* | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *et la limite de $g$ en $a$ est* | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| *alors la limite de $(f+g)$ en $a$ est* | | | | | | |

*FI signifie **forme indéterminée**, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de $(f+g)$.*

**Exemple:**

$$\lim_{x\to+\infty} -3x+2 = \ldots\ldots \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = \ldots\ldots \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} -3x+2-\sqrt{x} = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = \ldots\ldots \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \ldots\ldots \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}+\frac{1}{x} = \ldots\ldots$$

## 3.2 Limite d'un produit

**Théorème:**
*Dans le tableau suivant, $l$ et $l'$ sont deux réels. $a$ est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.*

| *Si la limite de $f$ en $a$ est* | $l$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *et la limite de $g$ en $a$ est* | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| *alors la limite de $(f\times g)$ en $a$ est* | | | | | | | | | |

**Exemple:**

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} -x^2 = \ldots\ldots \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} -x^2\sqrt{x} = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{x} = \ldots\ldots \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty} 3+\frac{1}{x} = \ldots\ldots \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to-\infty} (2+\frac{1}{x})(3+\frac{1}{x}) = \ldots\ldots$$

## 3.3 Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

le dénominateur a une limite non-nul :

**Théorème:**
*Dans le tableau suivant, $l$ et $l'$ sont deux réels. $a$ est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.*

| *Si la limite de $f$ en $a$ est* | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *et la limite de $g$ en $a$ est* | $l'\neq0$ | $\pm\infty$ | $l'>0$ | $l'<0$ | $l'>0$ | $l'<0$ | $\pm\infty$ |
| *alors la limite de $\frac{f}{g}$ en $a$ est* | | | | | | | |

**Exemple:**

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} -2+\frac{1}{x} = \ldots\ldots \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{-2+\frac{1}{x}} = \ldots\ldots$$

le dénominateur a une limite nul :

**Théorème:**
*Dans le tableau suivant, $l$ est un réel non-nul. $a$ est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.*

| *Si la limite de $f$ en $a$ est* | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *et la limite de $g$ en $a$ est* | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0$ |
| *alors la limite de $\frac{f}{g}$ en $a$ est* | | | | | |

**Exemple:**

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = \ldots\ldots \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to0^+} 2x+7 = \ldots\ldots \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+7}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$$

## 3.4 Formes indéterminées

D'après ce qui a été vu précédemment, on compte quatre formes indéterminés :

$$"\infty - \infty" \qquad "0 \times \infty" \qquad "\frac{\infty}{\infty}" \qquad "\frac{0}{0}"$$

Dans ce cas, il faut faire une étude particulière pour "lever l'indétermination".