Premiers calculs dans $\mathbb{C}$ et conjugué d'un nombre complexe

Exercice 1:

Soit $z = 3 - 4i$ et $z' = -1 + 2i$ deux nombres complexes. Déterminer sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z + z' \qquad z \times z' \qquad z^2 \qquad z + iz'$$

Exercice 2:

Démontrer que si $z = a + ib$ est un nombre complexe non-nul, son inverse s'écrit $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Exercice 3:

Déterminer les inverses des nombres complexes suivants :

$$3 - 4i \qquad 7 \qquad 3i \qquad 2 + 4i \qquad i$$

Exercice 4:

Soit $z_1 = 4 + i$ et $z_2 = -1 - i$ et $z_3 = 2i$ trois nombres complexes.

a. Déterminer $z_1 + z_2z_3$ et $\dfrac{z_1 + z_2}{z_2 + z_3}$

b. Déterminer $Re(z_1z_2z_3)$ et $Re\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$

c. Déterminer $Im(z_1z_2 + z_3)$ et $Im\left(\dfrac{z_1}{z_2 + z_3}\right)$

Exercice 5:

Pour tous complexes z et z', démontrer que :

a. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

b. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

c. $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$

d. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ si $z' \neq 0$

e. $z\overline{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$

f. $z + \overline{z} = 2Re(z)$

g. $z - \overline{z} = 2iIm(z)$

h. $\overline{(\overline{z})} = z$

Exercice 6:

Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer par récurrence que pour tout entier n non-nul, $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

Exercice 7:

Démontrer que :

a. Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.

b. Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z + \overline{z} = 0$.

Exercice 8:

Soit $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 8i$ et $z_4 = \dfrac{1}{2}$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$;

b. $z_1z_2z_3z_4$

c. $\overline{z_1z_2z_3z_4}$

d. $z_1\overline{z_2} + z_3\overline{z_4}$

e. $\dfrac{\overline{z_1} + z_2}{\overline{z_1}z_3}$

f. $\overline{\left(\dfrac{1}{z_1z_2z_3z_4}\right)}$

g. $z_1z_2z_3z_4\overline{z_1z_2z_3z_4}$