

Chapitre 5: Nombres complexes I

1 Notion de nombre complexe

Théorème:

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés **nombres complexes**, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les règles de calcul analogue à celle de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels. Cette écriture s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z .

Vocabulaire:

- a s'appelle la partie réelle du complexe. Si $z = a + ib$, alors on note $Re(z)$ la partie réelle de z et $Re(z) = a$.
- b s'appelle la partie imaginaire du complexe. Si $z = a + ib$, alors on note $Im(z)$ la partie imaginaire de z et $Im(z) = b$.
- tout nombre complexe de la forme $z = ib$ est appelé imaginaire pur.

Propriété:

- z est réel si et seulement si $Im(z) = 0$.
- z est un imaginaire pur si et seulement si $Re(z) = 0$.

Théorème:

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

2 Conjugué

2.1 Définition

Définition:

Soit $z = a + ib$ avec a et b réels. Le nombre complexe conjugué de z , noté $\bar{z}$, est le nombre complexe $a - ib$.

Exemple:

Si $z = 5 - 7i$ alors $\bar{z} = 5 + 7i$, si $z = 2$ alors $\bar{z} = 2$ et si $z = 2i$ alors $\bar{z} = -2i$.

Propriété:

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors :

- $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2Im(z)$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété:

- Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.
- Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z + \bar{z} = 0$.

Théorème:

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le produit $z\bar{z}$ est un nombre réel positif et si $z = a + ib$ alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$

2.2 Opérations sur les nombres conjugués

Propriété:

Pour tous complexes z et z' :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'} \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \text{ si } z' \neq 0$$

Théorème:

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout entier n non-nul, $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

3 Résolution des équations du second degré

Propriété:

Pour tous nombres complexes z et z' : $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$

Propriété:

Soient a , b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$, de discriminant Δ , admet :

- deux solutions réelles $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.
- une solution réelle double $-\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$.
- deux solutions complexes $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ si $\Delta < 0$.

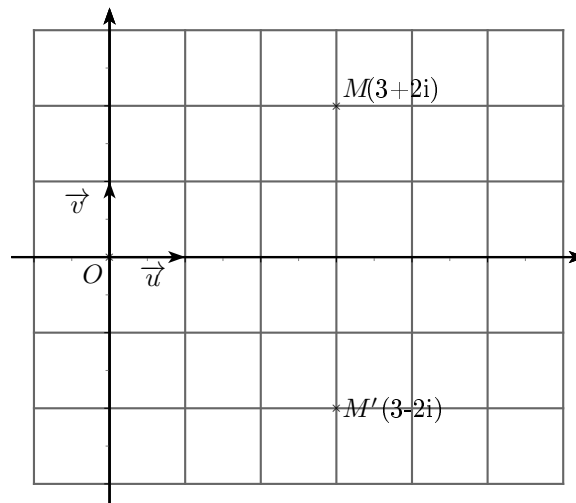
4 Représentation d'un nombre complexe par un point du plan

Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$ et est appelé plan complexe.

4.1 Affixe d'un point

Définition:

- À tout nombre complexe $a + ib$, où a et b sont réels, on associe le point $M(a; b)$ appelé point image de $z = a + ib$.
- Réciproquement, à tout point $M(a; b)$ on associe le nombre complexe $a + ib$ appelé affixe de M . On note alors $M(a + ib)$.



Propriété:

- M d'affixe z appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $\text{Im}(z) = 0$;
- M d'affixe z appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si $\text{Re}(z) = 0$;
- M d'affixe z et M' d'affixe $\overline{z}$ sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

4.2 Affixe d'un vecteur

Définition:

L'affixe du vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a; b)$ est le complexe $z = a + ib$.

Propriété:

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ où z_A et z_B sont les affixes de A et B .

Théorème:

Le milieu I du segment $[AB]$ où $A(z_A)$ et $B(z_B)$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$