Chapitre 6: Continuité et dérivation

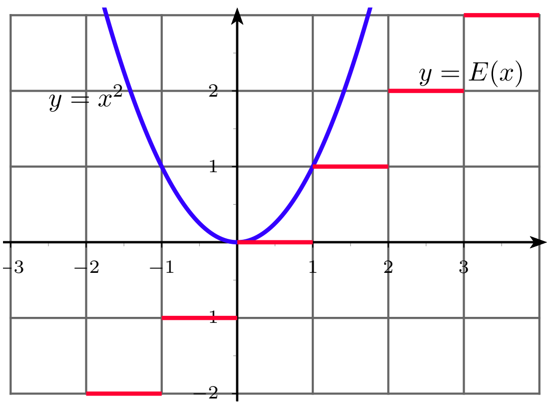
1 Continuité d'une fonction

Définition:
f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel appartenant à I. On dit que :

- *f est continue a si f a une limite finie en a telle que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$;*
- *f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout nombre de I.*

Remarque:
Une fonction définie sur un intervalle I est continue sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).

Exemple:
La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors que la fonction $x \longmapsto E(x)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$:



Théorème:
Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) a une limite finie l et si f est continue en l, alors $l = f(l)$.

Démonstration:
(u_n) converge vers l donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.
Posons $x = u_n$, comme f est continue en l donc $\lim_{x\to l} f(x) = f(l)$ donc $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$ soit $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(l)$.
Les suites (u_n) et (u_{n+1}) ont la même limite donc $l = f(l)$.

2 Dérivabilité et continuité

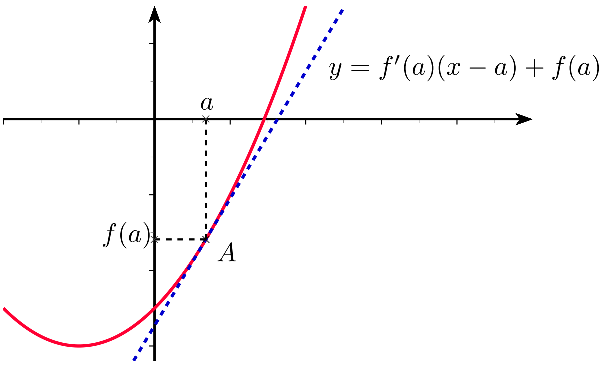
Dans cette partie, f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel appartenant à I.

2.1 Dérivabilité

Définition:
f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

Ainsi, dire que f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ signifie que la courbe de la fonction f admet en $A(a;f(a))$ une tangente non-verticale d'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$



2.2 Lien entre dérivabilité et continuité

Théorème:

- *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Démonstration:
Soit T la fonction définie par $T(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour $h\neq 0$ avec $a+h\in I$.
f est dérivable en a donc T a pour limite $f'(a)$ lorsque h tend vers 0. Ainsi,pour $h\neq 0$:

$$T(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\Longleftrightarrow hT(h)=f(x+h)-f(x)\Longleftrightarrow f(a+h)=f(a)+hT(h)$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0}T(h)=f'(a)$ on a $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$.
On pose $x=a+h$ soit $h=x-a$ et on obtient : $\lim\limits_{x-a\to 0}f(x)=f(a)$ soit $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ donc f est continue en a.

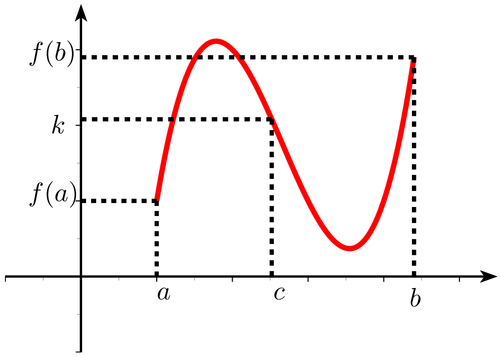
Remarque:
La réciproque de ce théorème est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2.3 Conséquences

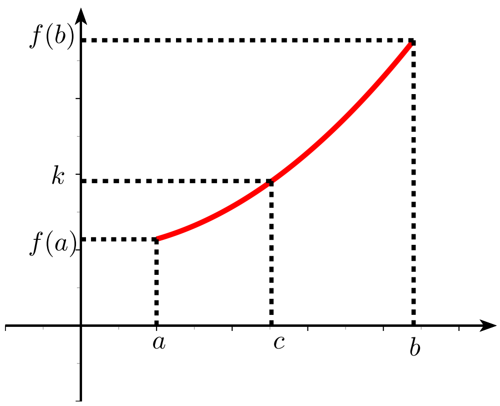
On a montré en première que les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, que les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur domaine de définition et que la fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc ces fonctions sont continues sur ces ensembles d'après le théorème précédent.
Cependant pour la fonction racine carrée, on peut montrer qu'elle est aussi continue en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$

3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème: (des valeurs intermédiaires)
f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Corollaire:
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a;b]$.



Démonstartion:
L'existence de la solution est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires. Supposons qu'on ait deux solutions distinctes x_0 et x_1.
D'une part $f(x_0) = k = f(x_1)$ et d'autre part comme $x_0 \neq x_1$ (par exemple $x_0 < x_1$) alors $f(x_0) \neq f(x_1)$ car f est strictement monotone.
L'hypothèse de départ est fausse, on ne peut pas avoir deux solutions distinctes et il n'existe donc qu'une unique solution à l'équation.

Remarque:
Il existe des extensions à ce corollaire dans le cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts à l'aide des limites. Voir les exemples en exercice.

4 Dérivées de fonctions composées

4.1 Rappels

f	f dérivable sur	f'
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$ avec k réel	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$

4.2 Fonctions composées

Théorème:
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel :

- *Pour $n \geq 2$, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$;*
- *Pour $n \geq 1$, la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$.*
  Cette égalité ce note aussi : $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$

Exemples:

- *La fonction $f : x \longmapsto (4x-5)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \times 4 \times (4x-5)^{3-1}$ soit $f'(x) = 12(4x-5)^2$*
- *La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -4 \times 2x \times \dfrac{1}{(x^2+1)^{4+1}}$ soit $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2+1)^5}$*

Théorème:
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) > 0$.
La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple:
La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{7x-2}$ est dérivable sur $\left]\dfrac{2}{7};+\infty\right[$ et $f'(x) = \dfrac{7}{2\sqrt{7x-2}}$

4.3 Généralisation

Théorème:
Soit f dérivable sur J et u dérivable sur I telles que $u(x) \in J$ pour tout x de I. La fonction $g = f \circ u$ est alors dérivable sur I et :

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$