

Chapitre 7: Exponentielle

1 Définition

Théorème:

Il existe une et une seule fonction f dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant :

$$(E) : \begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Démonstration:

Nous admettrons l'existence d'une telle fonction, montrons que celle-ci est unique.

- Montrons d'abord que si f vérifie (E) alors f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

Pour cela, on introduit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x)f(-x)$.

g est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0 \text{ car } f' = f.$$

La fonction g est donc constante sur \mathbb{R} et $g(x) = g(0) = f(0)f(0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel x_0 vérifiant $f(x_0) = 0$, on aurait alors $g(x_0) = 1 = f(x_0)f(-x_0) = 0$ soit $1 = 0$ ce qui est absurde donc f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

- Soit f_1 et f_2 deux fonctions vérifiant (E), posons $q = \frac{f_1}{f_2}$.

Par ce qui précède f_2 ne s'annule pas sur \mathbb{R} donc q est dérivable sur \mathbb{R} , comme quotient de fonctions dérivables.

$$\text{De plus, } \left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2} = \frac{f_1f_2 - f_1f_2}{f_2^2} = 0.$$

La fonction q est donc constante sur \mathbb{R} et $q(x) = q(0) = \frac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$: on a donc montré que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ c'est à dire qu'il existe une unique fonction vérifiant (E).

Définition:

On appelle fonction exponentielle, l'unique fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} qui vérifie (E). On la note $x \mapsto \exp(x)$.

Remarque:

On a démontré dans la preuve précédente que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

2 Propriétés

- La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est égale à elle-même.
- La fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} et $\exp(0) = 1$.
- Pour tout a et b réels, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
- Pour tout a et b réels et $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}; \quad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}; \quad \exp(na) = (\exp(a))^n.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Remarque:

On admettra que la fonction exponentielle est la seule fonction f dérivable sur \mathbb{R} , telle que pour tous a et b réels,

$$f(a+b) = f(a) \times f(b) \text{ et } f'(0) = 1.$$

3 Notation e^x

Définition:

L'image de 1 par la fonction exponentielle est noté e : $\exp(1) = e$.

Remarques:

- On a : $e^2 = e \times e = \exp(1) \times \exp(1) = \exp(1 + 1) = \exp(2)$. Ainsi d'une façon générale, on écrira e^x au lieu de $\exp(x)$.
- On a $e \simeq 2,718$.

Propriété:

Avec cette nouvelle notation, on peut écrire les propriétés précédentes de la manière suivante :

- $e^0 = 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$;
- pour tout a et b réels, et $n \in \mathbb{N}$: $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = e^a e^{-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{na} = (e^a)^n$.

4 Étude de la fonction exponentielle

4.1 Sens de variations et limites

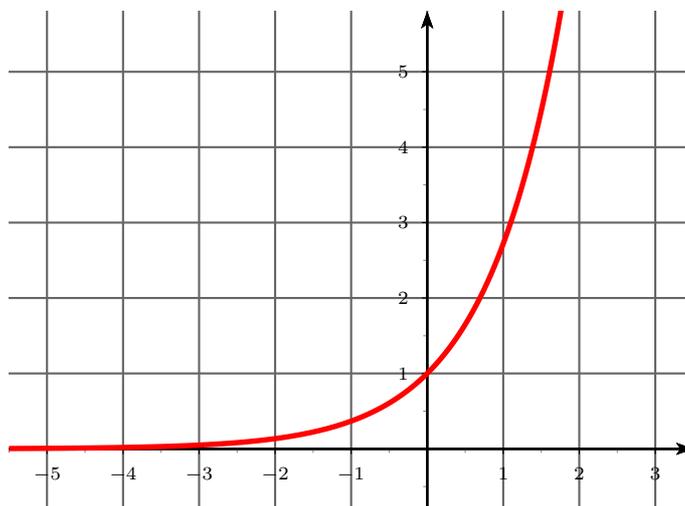
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

4.2 Tableau de variations et représentation graphique

Tableau de variations de la fonction $x \mapsto \exp(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$		0	$+\infty$

Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \exp(x)$:



La courbe représentative de la fonction exponentielle admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote en $-\infty$.

5 Limites utiles et dérivation

Propriété:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Théorème:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u' e^u.$$