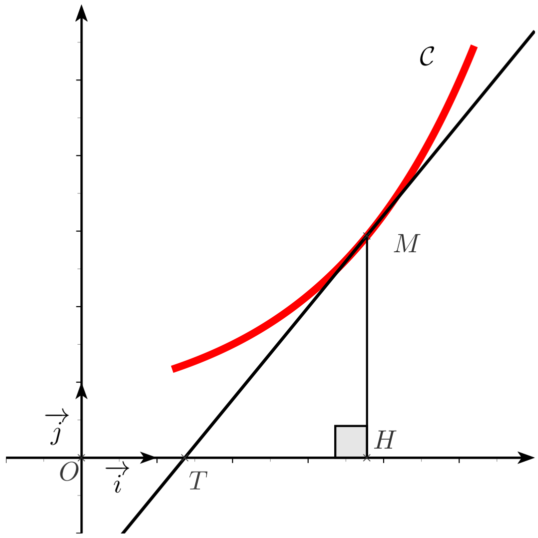
Introduction

1 Un problème de Leibniz [1]

Trouver une fonction f strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal donnée $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, à la propriété suivante :
Quel que soit le point M de $\mathcal{C}$, la tangente en M à $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses un point T tel que $\overrightarrow{TH} = \overrightarrow{i}$



Le problème ci-dessus fut énoncé par Leibniz pour montrer l'insuffisance de l'algèbre. Pour résoudre ce problème, il faut utiliser le calcul différentiel [2]. Dans cette activité, nous allons caractériser les fonctions f satisfaisant à la condition énoncée par Leibniz. Supposons qu'une telle fonction f existe et notons a l'abscisse du point quelconque M de $\mathcal{C}$.

1. Démontrer que $f'(a)$ est non-nul pour tout réel a.
2. Déterminer l'abscisse du point T en fonction de a.
3. Démontrer l'équivalence suivante :
$$\overrightarrow{TH} = \overrightarrow{i} \Longleftrightarrow f'(a) = f(a)$$
4. Démontrer que f convient si et seulement si $f' = f$.

Conclusion :
Pour déterminer f, on est conduit à résoudre une équation [3] dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle figure la dérivée première de la fonction. .

2 La fonction exponentielle

On admet à présent qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

1. Dans un premier temps, on va chercher à démontrer qu'une telle fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$.
   a. Déterminer la fonction dérivée de g.
   b. En déduire que $g(x) = 1$ pour tout réel x.
   c. Démontrer par l'absurde que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. A présent, on va chercher à démontrer l'unicité d'une telle fonction. Supposons que f_1 et f_2 sont deux fonctions vérifiant les conditions initiales et on introduit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.
   a. Déterminer la fonction dérivée de h.
   b. En déduire que $h(x) = 1$ pour tout réel x.
   c. Conclure.

Conclusion :
On appelle fonction exponentielle, noté $exp(x)$, l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. (1646-1716) Mathématicien allemand
2. Calcul utilisant la notion de fonction dérivée
3. Une telle équation est dite **équation différentielle**