Propriétés

1 Un théorème fondamental

Théorème : Pour tout réel x, $\quad \exp(x) > 0$

Démonstration :

1. Étudier la continuité de $x \longmapsto exp(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par l'absurde que pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

On pourra supposer qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) < 0$

2 Exponentielle d'une somme et conséquences

Théorème : Pour tout réel a et tout réel b, $\quad \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

I. **Démonstration :**

a. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la fonction dérivée de $g : x \longmapsto \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$.

b. Conclure.

II. **Conséquences :**

a. Montrer que pour tout réel a, $\quad \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

b. Montrer que pour tout réel a et tout réel b, $\quad \exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

c. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad \exp(nx) = [\exp(x)]^n$

d. En déduire que pour tout entier relatif n, $\quad \exp(nx) = [\exp(x)]^n$

III. **Exercices :**

a. Simplifier les expressions suivantes :

$$\exp(3)\exp(2) \qquad \exp(-3x)\exp(x) \qquad \frac{[\exp(2x+1)]^3\exp(-6x+1)}{\exp(4)}$$

$$\exp(-4)\exp(5) \qquad \frac{[\exp(3)]^2}{[\exp(2)]^3}$$

b. Montrer que pour tout réel x, $\quad \left[\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2 = \exp(x)$