

Forme exponentielle

1 Forme exponentielle

1. Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ .
 - a. Indiquer la position du point d'affixe z dans le plan complexe.
 - b. Déterminer l'écriture sous forme trigonométrique de z .
2. Soit f la fonction qui à tout réel θ associe le complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. Montrer que $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ pour tout réels θ et θ' .
3. La fonction f transforme une somme en un produit, tout comme la fonction exponentielle. On définit ainsi une nouvelle écriture des nombres complexes de module 1 :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

En déduire une nouvelle écriture de tous les nombres complexes.

On appellera cette écriture la **forme exponentielle** du nombre complexe.

4. Donner une écriture sous forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 4 - 4i \quad z_2 = -2i \quad z_3 = -2\sqrt{3} + 2i \quad z_4 = -3 \quad z_5 = 6i$$

5. Donner l'écriture sous forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_6 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_7 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad z_8 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad z_9 = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \quad z_{10} = \sqrt{2}e^{-i\pi}$$

6. Placer les points M_i d'affixes z_i dans le plan complexe.

2 Conséquences

1. Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non-nul. Démontrer que :

$$\bar{z} = re^{-i\theta} \quad ; \quad zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad ; \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

2. Soit z et z' sont deux nombres complexes non-nuls. Démontrer que :

- a. $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$.
- b. $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$.
- c. Si $z' \neq 0$; $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$.
- d. Pour tout entier naturel non-nul n ; $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \pmod{2\pi}$.
- e. Pour $z \neq 0$; $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$

3 Applications géométriques

Exercice 1:

Soit A, B, C et D quatre points d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. Montrer que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Exercice 2:

Soit A, B, C et D quatre points d'affixes $z_A = -2, z_B = 2, z_C = -1 + i$ et $z_D = 1 - 3i$. Démontrer que les triangles BCD et ACD sont rectangles.