Chapitre 8: Nombres complexes II

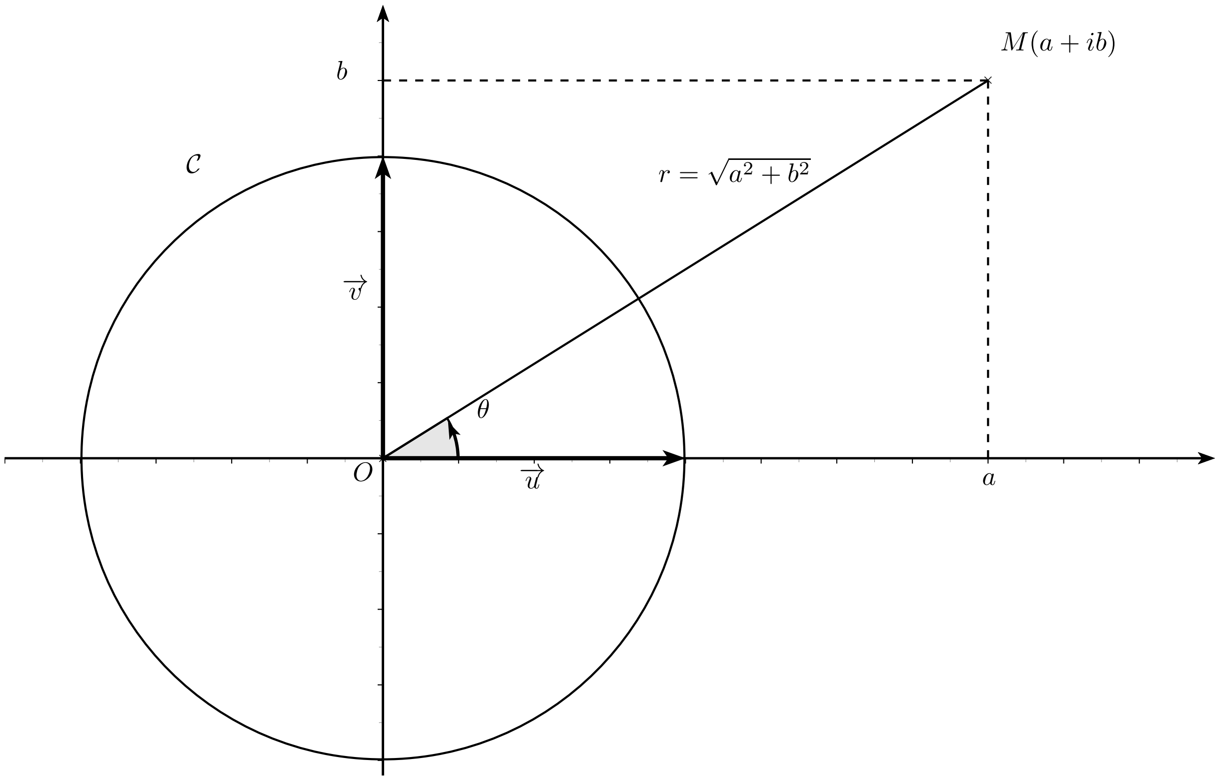
1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.1 Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère un nombre complexe non-nul $z = a + ib$ et le point M d'affixe z. La demi-droite $[OM)$ coupe le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ en A. On note alors :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta \quad \texttt{et} \quad OM = r$$

Le point A a pour coordonnées cartésiennes $(cos(\theta); sin(\theta))$ et $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OA}$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il en résulte que le point M a pour coordonnées cartésiennes $(rcos(\theta); rsin(\theta))$



Ainsi, le nombre complexe $z = a + ib$ s'écrit aussi :

$$z = r\left(cos(\theta) + isin(\theta)\right)$$

Définition:
Soit un nombre complexe non-nul $z = a + ib$.

- *un argument de z, noté $arg(z)$, est une des mesures, exprimée en radian, de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.*
- *le module de z, noté $|z|$, est la longueur OM. On en déduit que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*
- *z s'écrit sous la forme $z = r\left(cos(\theta) + isin(\theta)\right)$ où $\arg(z) \equiv \theta \,(mod\, 2\pi)$ Cette écriture est appelée forme **trigonométrique** du nombre complexe z.*

Remarque:
L'argument de z est défini modulo 2π ce qui implique la non-unicité de la forme trigonométrique.
Par exemple, pour $z = -1 + i\sqrt{3}$, on a :
$r = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$; $cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ *et* $sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *donc* $\theta = \frac{2\pi}{3}\,(mod\, 2\pi)$ *d'où z admet* $2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$ *et*

$2\left(cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+isin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)$ *pour formes trigonométriques.*
Attention, on peut aussi montrer que $z=-2\left(cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}\right)$ *mais cette écriture n'est pas une forme trigonométrique puisque* $r\neq -2$.

Propriété:
Deux nombres complexes non-nuls $z=r\left(cos(\theta)+isin(\theta)\right)$ *et* $z'=r'\left(cos(\theta')+isin(\theta')\right)$ *écrits sous forme trigonométrique sont égaux si et seulement si* $r=r'$ *et* $\theta\equiv\theta'\,(mod\,2\pi)$

1.2 De la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement

Soit z un nombre complexe non-nul tel que $\arg(z)=\theta\,(mod\,2\pi)$ et $|z|=r$ alors sa forme algébrique est $z=a+ib$ avec $a=rcos(\theta)$ et $b=rsin(\theta)$.

Soit z un nombre complexe non-nul tel que $z=a+ib$ alors sa forme trigonométrique est $z=r\left(cos(\theta)+isin(\theta)\right)$ avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et θ défini par $cos(\theta)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin(\theta)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

1.3 Interprétation graphique

Théorème:
Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A *et* z_B *dans un repère orthonormé direct* $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ *alors* $AB=|z_B-z_A|$

Démonstration:
Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{OM}$ *a pour affixe* z_M *donc* $z_M=z_B-z_A$ *soit* $|z_M|=|z_B-z_A|$. *Comme* $OM=|z_M|$ *et* $AB=OM$ *on en déduit que* $AB=|z_B-z_A|$

Remarque:
Ainsi le point M d'affixe z appartient au cercle de centre A et de rayon r si et seulement si :

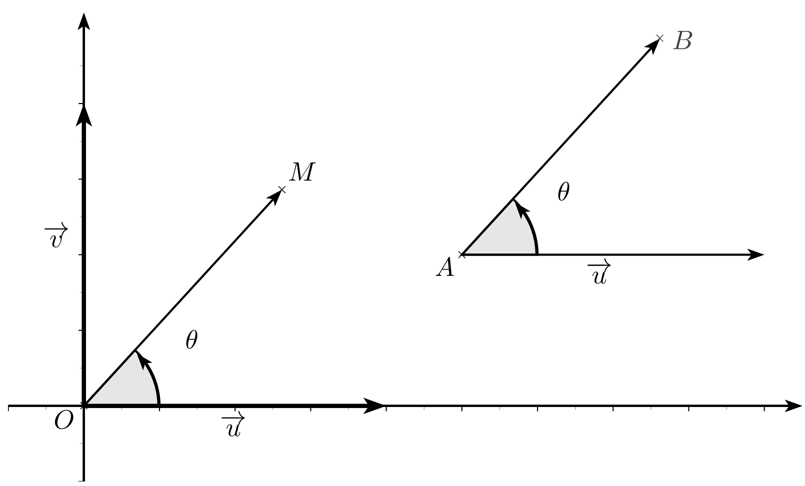
$$|z-z_A|=r$$

De même, le point M d'affixe z appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ *si et seulement si :*

$$|z-z_A|=|z-z_B|$$

Théorème:
Si A et B sont deux points distincts d'affixes respectives z_A *et* z_B *dans un repère orthonormé direct* $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ *alors* $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB}\right)=arg(z_B-z_A)$

Démonstration:
Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ *donc* $z_M=z_B-z_A$ *et* $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB}\right)$. *Or* $arg(z_M)=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}\right)$ *donc* $arg(z_B-z_A)=arg(z_M)=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB}\right)$



2 Notation exponentielle

2.1 Définition

Définition:
Tout nombre complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$$

Exemple:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

et

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Théorème:
Tout nombre complexe non-nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite forme ***exponentielle*** *:*

$$z = re^{i\theta}$$

Démonstration:
Tout nombre complexe non-nul admet une écriture sous forme trigonométrique de la forme $r\,(cos(\theta) + isin(\theta))$. Or $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$ donc z s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$.

Propriété:
Deux nombres complexes non-nuls $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ écrits sous forme exponentielle sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta \equiv \theta'\,(mod\,2\pi)$

Propriété:
Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non-nuls alors :

$$\overline{z} = re^{-i\theta} \quad ; \quad zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad ; \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

2.2 Conséquences

Dans tout ce paragraphe z et z' sont deux nombres complexes non-nuls.

Théorème:
$|\overline{z}| = |z|$ *et* $arg(\overline{z}) \equiv -arg(z)\ (mod\,2\pi)$.

Théorème:
$|zz'| = |z|\,|z'|$ *et* $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')\ (mod\,2\pi)$.

Conséquences : Pour tout entier naturel non-nul n ; $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) \equiv n\ arg(z)\ (mod\,2\pi)$.

Théorème:
$|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ *et* $arg(\frac{z}{z'}) \equiv arg(z) - arg(z')\ (mod\,2\pi)$.

Conséquences : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg(z)\ (mod\,2\pi)$