

# Limites et croissances comparées

## 1 Limites de la fonction logarithme

1. Soit  $M$  un réel strictement positif. Montrer qu'il existe  $A \in ]0; +\infty[$  tel que pour tout réel  $x > A$ ,  $\ln(x) > M$ .
2. Conclure sur la limite de la fonction logarithme en  $+\infty$ .
3. Montrer que pour  $x > 0$ ,  $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$
4. Conclure sur la limite de la fonction logarithme en 0.

## 2 Limites et dérivée

1. Rappeler la fonction dérivée de la fonction logarithme.
2. En déduire la limite de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$  en 1 et la limite de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  en 0.

## 3 Croissances comparées

1. Déterminer la limite de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  en  $+\infty$ .
2. En déduire la limite de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^n}$  en  $+\infty$  pour  $n$  un entier,  $n \geq 2$ .
3. Déterminer la limite de la fonction  $x \mapsto x \ln x$  en 0.
4. En déduire la limite de la fonction  $x \mapsto x^n \ln x$  en 0 pour  $n$  un entier,  $n \geq 2$ .

On posera  $X = \ln x$