

Exercices type bac 2012

Exercice 1:

Partie 1 : Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie 2 : Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
Montrer que la fonction g est positive sur $[1; +\infty[$.
2. a. Montrer que, pour tout x de $[1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b. En déduire le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$.
c. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
d. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance $M_k N_k$ entre les points M_k et N_k est donnée par $M_k N_k = \frac{\ln(k)}{k}$.
b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance $M_k N_k$ soit inférieure ou égale à 10^{-2} .

Exercice 2:

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$.
On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n , $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.
b. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Placer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
c. Préciser la valeur de α_1 .
d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
3. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = \ln x - x + 1.$$

En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ .

- c. Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.
4. Déterminer la limite de la suite (α_n) .

Annexe

