DEVOIR BILAN 2		
Enseignant : GREAU D. **Date** : 15/10/2013	**Nom** : **Prénom** : **Classe** :	**Note** :

Exercice 1: 7 points

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - x^2$.
Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f
   a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$.
   c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.
2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0,1$
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 2u_n - u_n^2$$

   a. Sur le graphique représenté dans l'annexe, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
   Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0 ; 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelles conjectures peut-on émettre quand au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?
   b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
   Dans cette question, aucune démonstration n'est demandée.

   Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

Exercice 2: 6 points

Partie 1 - Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire

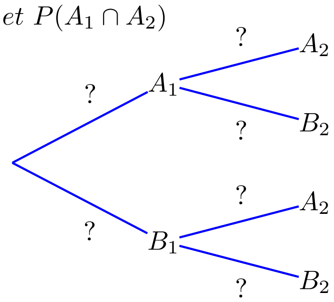
1. Pourquoi a t'on $P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$?
2. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

Partie 2 - Dépendance ou Indépendance

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B. Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, sept vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe.
On considère les évènements suivants :

A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. Calculer les probabilités suivantes : $P(A_1)$ et $P(A_2)$.
2. Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants : $P_{A_1}(A_2)$, $P_{B_1}(A_2)$ *et* $P(A_1 \cap A_2)$
3. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



4. Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $P(A_2) = \dfrac{1}{2}$.
5. Les évènements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
6. Que penser des évènements B_1 et B_2 ?

Exercice 3: 7 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x+2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer que pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$.
4. En déduire les variations de la fonction f.
5. Soit C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan :
   a. Déterminer les équations des tangentes T et T' à la courbe C_f en respectivement -3 et 0.
   b. Montrer que T et T' s'intersectent en $I(-6; -4)$.

Annexe