DEVOIR BILAN 5

Enseignant : GREAU D.	**Nom** :	**Note** :
	Prénom :	
Date : 14/02/2014	**Classe** :	

Exercice 1: 4 points

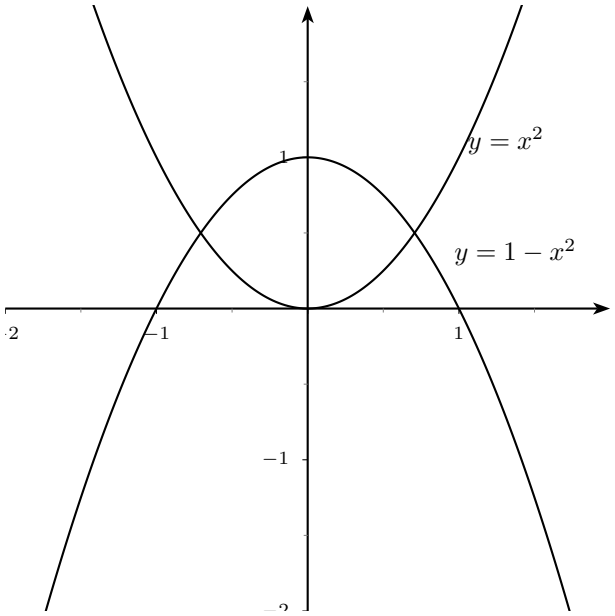
Déterminer les intégrales ci-dessous :

1. $\int_{-3}^{5} \left[(x-2)^2+1\right] \mathrm{d}x$
2. $\int_{0}^{12} \frac{2t}{t^2+1} \mathrm{d}t$

Exercice 2: 4 points

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 1 - f(x)$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.
2. En déduire l'aire comprise entre les deux courbes tracées ci-dessous :



Exercice 3: 4 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)e^x$

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que $F(x) = (ax+b)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la valeur moyenne de f sur $[ln(3); ln(9)]$ est $30 - \frac{30}{ln3}$

Exercice 4: 8 points

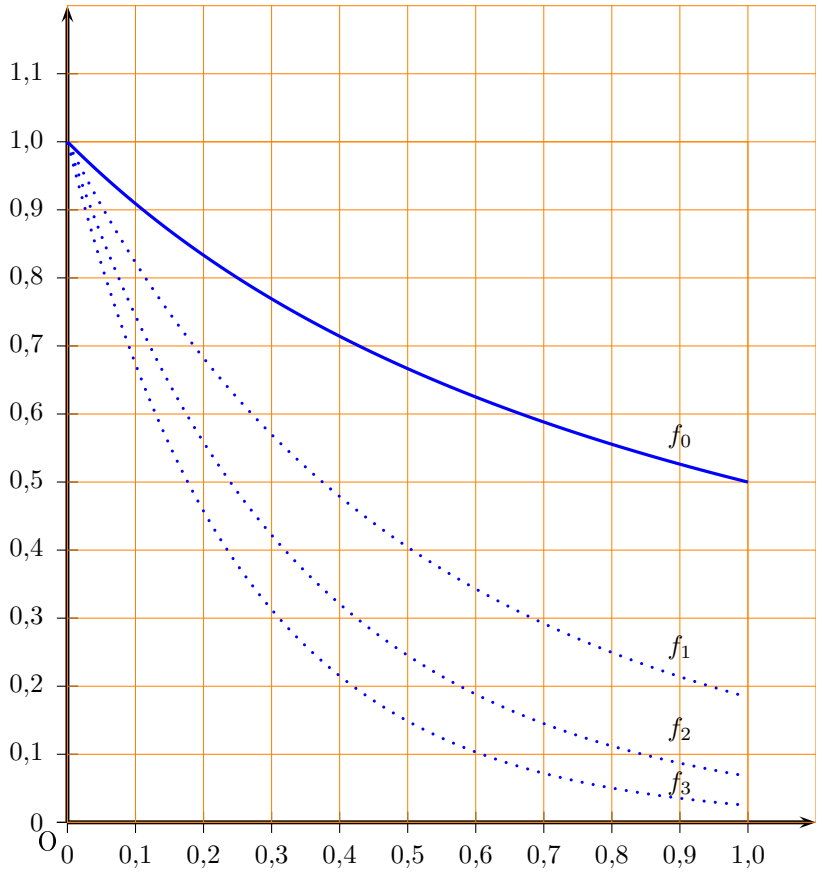
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n :



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$\mathrm{e}^{-(n+1)x} \leq \mathrm{e}^{-nx}$$

c. Démontrer la conjecture effectuée précédemment.

2. a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$\frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$$

b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

c. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-e^{-n}}{n}$$

d. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.