DEVOIR BILAN 6		
Enseignant : GREAU D. **Date** : 04/04/2014	**Nom** : **Prénom** : **Classe** :	**Note** :

Exercice 1: 7 points

Soit X une variable aléatoire qui suit $\mathcal{N}(0;1)$.

1. Donner l'expression de la fonction de densité de X.
2. Tracer à main levé la courbe de cette densité.
3. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathtt{d}x$.
   a. Démontrer que Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \Phi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x)$.
   c. Démontrer que $P(-x \leq X \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.
4. Démontrer que pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un **unique** nombre strictement positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

5. Déterminer $u_{0,3}$.
6. Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(-3;2^2)$.
   a. Déterminer $\Phi(2)$. En déduire que $P(Z < 1) \simeq 0,977$
   b. Déterminer à l'aide de $P(Z < 1)$ les probabilités suivantes :
      - $P(Z \geq 1)$
      - $P(-7 \leq Z \leq 1)$

Exercice 2: 9 points

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$.

1. Déterminer le signe de f sur $]0;+\infty[$.
2. Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Conclure sur les éventuelles asymptotes.
4. Soit X une variable aléatoire à densité telle que $X(\Omega) = [1;e]$ et sa densité sur $[1;e]$ est f.
   a. Dériver la fonction $g : x \longmapsto (\ln(x))^2$.
   b. En déduire $\displaystyle\int_1^e f(x)\mathtt{d}x$.
   c. Déterminer $P(1 \leq X \leq \sqrt{e})$.
   d. Dériver la fonction $h : x \longmapsto 2x\ln(x) - 2x$.
   e. En déduire $\displaystyle\int_1^e xf(x)\mathtt{d}x$. Conclure.

Exercice 3: 4 points

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous sur $[0;2\pi[$:

1. $\sqrt{3}cos(x) = \dfrac{3}{2}$
2. $sin^2(x) - 2sin(x) - 3 = 0$
3. $cos(x) > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$