Devoir maison 3

Exercice 1: 9 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2+x^3}{1+x^2}$$

1. a. Montrer que l'équation $2 + x^3 = 0$ admet une unique solution notée α sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
   c. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
2. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.
3. a. Montrer que pour tout réel x, $(x-1)(x^2+x+4) = -4+3x+x^3$
   b. Étudier les variations de la fonction f.
4. Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout réel x,
$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{1+x^2}$$
5. En déduire l'existence d'une asymptote oblique Δ à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
6. Étudier les positions relatives de Δ et $\mathcal{C}$.

Exercice 2: 6 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'unité graphique est 1 cm.
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -3+3\text{i}$, $z_{\text{B}} = 3+\text{i}$, $z_{\text{C}} = -2-\text{i}$ et $z_{\text{D}} = 1-2\text{i}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Conclure sur la nature du quadrilatère $ABDC$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AC) et (BD). On nommera E ce point.
3. Déterminer l'équation de la hauteur issue de E dans le triangle ABE. En déduire l'affixe du point d'intersection de cette hauteur et de la droite (AB).
4. Déterminer l'aire du triangle ABE.
5. En déduire l'aire du triangle CDE.

Exercice 3: 5 points

Résoudre les équations suivantes d'inconnue complexe z :

1. $2\overline{z} + 5iz = i - 2$
2. $2z + \dfrac{5}{z} = 1$
3. $z\overline{z} = 2Re(z)Im(z)$