Devoir maison 5

Exercice 1: 8 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Soit A et B deux points d'affixes respectives $z_A=-3+3i$ et $z_B=2e^{i\frac{-2\pi}{3}}$. On placera les points au fur et à mesure de l'exercice.

1. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point A.
2. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B.
3. Déterminer l'affixe z_C du point C tel que $z_C=\overline{z_A}z_B$ sous forme exponentielle.
4. Déterminer l'affixe z_D du point D tel que $z_D=(z_A)^3$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
5. Déterminer l'affixe z_E du point E tel que $z_E=\dfrac{1}{\overline{z_B}}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
6. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(z)$ tels que $\dfrac{|z-z_D|}{|z-z_B|}=1$ puis représenter $\mathcal{E}$.
7. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points $M(z)$ tels que $|z|=|1-4i|$ puis représenter $\mathcal{F}$.

Exercice 2: 12 points

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x)=x\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\right)$$

1. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x sur $\mathbb{R}$.
3. Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $\mathbb{R}$ par $g''(x)=(2+x)\mathrm{e}^x$.
4. En déduire les variations de la fonction g' sur $\mathbb{R}$.
5. Établir que l'équation $g'(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
6. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
7. En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
8. Démontrer que $e^{\alpha}=\dfrac{\mathrm{e}}{1+\alpha}$
9. Déterminer la tangente à la courbe de la fonction g en 0 puis démontrer que cette tangente est située sous la courbe de la fonction g.