Correction de la question 4

Soit f_5 la fonction définie par $f_5(x) = ln\left(5+5x+x^2\right)$. f_5 est définie si $5+5x+x^2>0$. $\Delta = 5 > 0$ donc :

x	$-\infty$		$\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$5+5x+x^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi f_5 est définie sur $I = \left]-\infty; \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-5+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.
Sur I, f_5 est dérivable et :

$$f_5'(x) = \frac{5+2x}{5+5x+x^2}$$

Ainsi, $f_5'(x)$ est du signe de $5+2x$ sur I et comme $\frac{-5}{2} \in \left[\frac{-5-\sqrt{5}}{2}; \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right]$, $f_5'(x) < 0$ sur $\left]-\infty; \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right[$ soit f_5 est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right[$ et $f_5'(x) > 0$ sur $\left]\frac{-5+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ soit f_5 est croissante sur $\left]\frac{-5+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.
Sur I, $f_5(x) = 0 \iff 5+5x+x^2 = 1 \iff 4+5x+x^2 = 0$. $\Delta = 9 > 0$ donc $4+5x+x^2 = 0$ en $x_1 = -4$ et en $x_2 = -1$.
A l'aide des variations de f_5, on peut en déduire que $f_5(x)$ est positif sur $]-\infty; -4]$, négatif sur $\left[-4; \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right[$, négatif sur $\left]\frac{-5+\sqrt{5}}{2}; -1\right]$ et positif sur $[-1; +\infty[$