Le raisonnement par récurrence

Un nouveau type de raisonnement

On cherche à démontrer la propriété suivante :

$$\text{pour tout entier non-nul } n, \qquad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On note P_n cette propriété.

1. Développer $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Que peut-on remarquer ?
2. Montrer que P_1, P_2 et P_3 sont vraies.
3. Peut-on en conclure que P_n est vraie pour tout entier non-nul n ?
4. Exprimer la propriété P_{n+1}.
5. On suppose que la propriété P_n est vraie pour un entier non-nul n. Montrer alors que la propriété P_{n+1} est vraie.
6. Conclure.

Principe du raisonnement par récurrence

Soit P_n une proposition qui dépend d'un entier naturel n et n_0 est un entier naturel. Pour montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, P_n est vraie, on procède en trois étapes :

Étape 1, l'initialisation : On vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est à dire que la proposition est vraie pour le premier indice n_0.

Étape 2, l'hérédité : On suppose que pour un entier naturel quelconque $n \geqslant n_0$, P_n est vraie (c'est l'hypothèse dite de récurrence) et on démontre qu'alors P_{n+1} est vraie.

Étape 3, la conclusion : On peut alors conclure que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n ($n \geqslant n_0$).

Un peu d'entrainement

1. Démontrer que pour tout entier n, $n \geq 1$, $\quad 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

   Démontrer que $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right[$ pour tout entier naturel n.