Correction

Pour n entier naturel non-nul, soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Initialisation : Pour $n = 1$, $1 \times 2 = 2$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n donné. Par hypothèse de récurrence :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

donc

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

soit

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right)$$

or $\dfrac{n}{3} + 1 = \dfrac{n+3}{3}$ donc

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ pour tout entier naturel non-nul.