Approximation de racine $\sqrt{ab}$

Soient a et b deux entiers donnés tels que $0 < a < b$. L'objectif de cette activité est d'approximer $\sqrt{ab}$.

1. Montrer que
$$a < \sqrt{ab} < b$$

2. Montrer que
$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

L'encadrement $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ est meilleur que l'encadrement que $a < \sqrt{ab} < b$, d'où l'idée de réitérer le procédé en remplaçant a par $\frac{2ab}{a+b}$ et b par $\frac{a+b}{2}$.

Ceci conduit à introduire les deux suites (a_n) et (b_n) définit conjointement par :

$$a_0 = a\ ,\ b_0 = b \text{ et pour tout entier naturel } n,\ a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$$

De plus, par construction, on a :
$$a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b$$

3. Montrer que pour tout entier n,
$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

4. En déduire que pour tout entier n,
$$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$
Conclure.

5. Montrer que pour tout entier n,
$$0 \leq \sqrt{ab} - a_n \leq b_n - a_n$$
Conclure.

6. Compléter et entrer le programme ci-dessous dans le logiciel Algobox :

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE n
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    c PREND_LA_VALEUR a
    a PREND_LA_VALEUR ......
    b PREND_LA_VALEUR ......
    AFFICHER "Etape"
    AFFICHER* i
    AFFICHER* a
    AFFICHER* b
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

7. Montrer que la suite (a_nb_n) est constante et que :
$$a < \sqrt{a_nb_n} < b$$