

## Étude d'une fonction polynôme

Une fonction polynôme est une fonction de la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \end{aligned}$$

où  $a_k \in \mathbb{R}$  pour tout entier  $k$  entre 1 et  $n$ . De plus, on dit que cette fonction polynôme est de degré  $n$  si  $a_n \neq 0$ .

1. Déterminer le degré de la fonction polynôme  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x(2x - 3)(x - 2)^2 + 2$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
3. Montrer que pour tout réel  $x$  non-nul,

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \frac{1}{x^{n-k}} \right)$$

4. En déduire que la limite d'un polynôme en  $+\infty$  et en  $-\infty$  est donnée par la limite de son monôme de plus haut degré.
5. Étudier le signe, les variations et les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 1 - 2x^2 + x^4$ .
6. Réaliser la même étude pour la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 9x^2 - 18x$ .