

Correction de la question 6

Étudier le signe, les variations et les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 9x^2 - 18x$

Étude du signe :

Pour tout réel x , $h(x) = -\frac{1}{2}x(x^2 - 18x + 36)$

L'équation $x^2 - 18x + 36 = 0$ admet (après étude du discriminant) deux solutions : $9 + 3\sqrt{5}$ et $9 - 3\sqrt{5}$ d'où :

x	$-\infty$	0	$9-3\sqrt{5}$	$9+3\sqrt{5}$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}x$	$+$	$\emptyset$	$-$	$-$	$-$
$x^2-18x+36$	$+$	$+$	$\emptyset$	$-$	$+$
$h(x)$	$+$	$\emptyset$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$

Variations :

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 18x - 18$.

L'équation $-\frac{3}{2}x^2 + 18x - 18 = 0$ admet (après étude du discriminant) deux solutions : $6 - 2\sqrt{6}$ et $6 + 2\sqrt{6}$ d'où :

x	$-\infty$	$6 - 2\sqrt{6}$	$6 + 2\sqrt{6}$	$+\infty$	
$h'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$
$h(x)$	$+\infty$	$108 - 48\sqrt{6}$	$108 + 48\sqrt{6}$	$-\infty$	

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x^3 = +\infty$$