Étude d'une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est une fonction de la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k} \\ &= \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m} \end{aligned}$$

où $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout entier k entre 0 et n et $b_k \in \mathbb{R}$ pour tout entier k entre 0 et m.

1. Déterminer les monômes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur de la fonction rationnelle f définie par

$$f(x) = \frac{1 + x^2 - 2x^3}{x + x^2 + 5x^4}$$

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que pour tout réel x non-nul,

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k} = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \frac{\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \frac{1}{x^{n-k}}\right)}{\left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_k}{b_m} \frac{1}{x^{m-k}}\right)}$$

4. En déduire que la limite d'fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est donnée par la limite du quotient des ses monômes de plus haut degré.
5. Étudier le signe, les variations et les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 2}$$

6. Réaliser la même étude pour la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 3x}$$

.