Restitution Organisée de Connaissance (R.O.C.)

24/11/2014

R.O.C. 1:
Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont deux événements indépendants.

Démonstration:
D'après la formule des probabilités totales, $P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$ *donc*

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Or A *et* B *sont indépendants d'où*

$$\begin{array}{rcl} P(\overline{A} \cap B) & = & P(B) - P(A)P(B) \\ P(\overline{A} \cap B) & = & (1 - P(A)) \times P(B) \\ P(\overline{A} \cap B) & = & P(\overline{A}) \times P(B) \end{array}$$

On en déduit que $\overline{A}$ *et* B *sont deux événements indépendants.*

R.O.C. 2:
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :
- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$;

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration:
- *Il existe un entier* n_0 *tel que pour tout entier* n, $n \geq n_0$, *on a :* $u_n \leq v_n$ *;*
- *Soit* $A > 0$ *un réel fixé.*
  La suite (u_n) *a pour limite* $+\infty$ *donc l'intervalle* $]A; +\infty[$ *contient tous les termes de la suite* (u_n) *à partir d'un rang* n_1 *;*

Si on considère $n_2 = max(n_0, n_1)$ *alors pour tout entier* n, $n \geq n_2$, *l'intervalle* $]A; +\infty[$ *contient tous les termes de la suite* (v_n) *donc la suite* (v_n) *a pour limite* $+\infty$.

R.O.C. 3:
Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Démonstration:
Soit $q > 1$ *alors* $q = 1 + a$ *avec* $a > 0$.

pour n *entier naturel, soit* $\mathcal{P}(n)$, *la propriété*

$$q^n \geq 1 + na$$

Initialisation : *Pour* $n = 0$, $q^0 = 1$ *et* $1 + 0.a = 1$ *donc* $\mathcal{P}(0)$ *est vraie.*

Hérédité : *Supposons que la propriété* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie pour un entier naturel* n *donné. Par hypothèse de récurrence :*

$$q^n \geq 1 + na$$

donc

$$q^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$$

puisque $(1 + a) = q > 0$

$$q^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$$

et $na^2 \geq 0$ donc

$$q^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.
Conclusion : *D'après le principe de récurrence, $q^n \geq 1+na$ pour tout entier n.*
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+na=+\infty$ pour $a>0$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

R.O.C. 4:

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Démonstration:
Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

- *(u_n) est non-majorée donc pour tout réel $A>0$, il existe n_0 tel que $u_{n_0}>A$;*
- *(u_n) est croissante donc pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n>A$.*

Ainsi, quelque soit $A>0$, il existe n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n_0}>A$ ce qui revient à dire que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$$

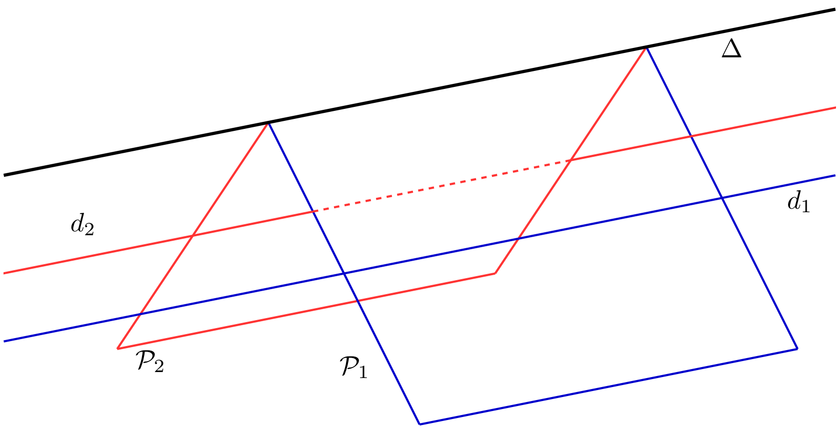
R.O.C. 5:

Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite l alors pour tout entier naturel n, $u_n \leq l$

Démonstration:
Supposons (par l'absurde) qu'il existe un terme de la suite noté u_{n_0} tel que $u_{n_0}>l$.
Posons $d=|u_{n_0}-l|$. Par construction, $u_{n_0}>l+\dfrac{d}{2}$ et (u_n) est croissante donc l'intervalle ouvert $\left]l-\dfrac{d}{2};l+\dfrac{d}{2}\right[$ contient uniquement les termes de la suite pour $n<n_0$ soit un nombre fini ce qui contredit la définition de la limite l. Ainsi, tout entier naturel n, $u_n \leq l$.

R.O.C. 6:

Soit d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en une droite Δ alors d_1 et d_2 sont parallèles à Δ.



Démonstration:
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de d_1, comme d_1 et d_2 sont parallèles, $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de d_2.
Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de Δ, l'objectif de la démonstration est de montrer que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires.
On considère donc $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}_1$ et $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{t}\right)$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}_2$. Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en Δ, le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut se décomposer de deux manières différentes :

$$\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}=c\overrightarrow{u}+d\overrightarrow{t}$$

donc

$$(a-c)\overrightarrow{u}=d\overrightarrow{t}-b\overrightarrow{v}$$

Si $a \neq c$ alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ sont coplanaires ce qui contredit le fait que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ soient sécants d'où $a=c$.
On en déduit donc que $d\overrightarrow{t}=b\overrightarrow{v}$ soit que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ sont colinéaires ce qui contredit là encore fait que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ soient sécants d'où $d=b=0$.
On obtient donc que $\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}$ donc d_1 et d_2 sont parallèles à Δ.