Nombres complexes

Exercice 1:

Pour chacun des nombres complexes suivants, donner le forme algébrique et une forme trigonométrique :

$z_1 = 1 - \sqrt{3}i$; z_2 de module 4 et d'argument $-\dfrac{\pi}{6}$

$z_3 = -3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$; $z_4 = -\sqrt{5} + i\sqrt{5}$

$z_5 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$; $z_6 = 1 + \sqrt{3}i$

$z_7 = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{3}i}$; $z_8 = (1 + \sqrt{3}i)^5$

Exercice 2: Soit $z = \dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - i}$

1. Déterminer la forme algébrique de z.
2. Déterminer une forme trigonométrique de z.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $2z^4 + 12z^2 + 10 = 0$

Exercice 4: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par : $\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \lambda \cdot z_n + \mathrm{i} \end{cases}$

On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Calcul de z_n en fonction de n et de λ.
   (a) Vérifier les égalités : $z_1 = \mathrm{i}$; $z_2 = (\lambda + 1)\mathrm{i}$; $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)\mathrm{i}$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul : $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i}$.
2. Étude du cas $\lambda = \mathrm{i}$.
   (a) Montrer que $z_4 = 0$.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.
   (c) Représenter les points M_0 , M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
3. Caractérisation de certaines suites (z_n).
   (a) On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.
   (b) Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\lambda^k = 1$.