<table>
<tr><td colspan="3">BAC BLANC - Spécialité</td></tr>
<tr><td>Enseignants : SECHER P.
GREAU D.
Date : 03/03/2015</td><td>Nom :
Prénom :
Classe :</td><td>Note :

Durée : 4 heures</td></tr>
</table>

Exercice 1: 5 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse **non justifiée** n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

- **Proposition 1 :** Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

- g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x + 1 - e^{2x+1}$

  Proposition 2 : Sur $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\frac{-1}{2}$.

  Proposition 3 : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ est : -1.

- L'espace est muni d'un repère orthonormée $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
  $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x + 3y - z - 11 = 0$ et $x + y + 5z - 11 = 0$.

  Proposition 4 : Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ se coupent perpendiculairement.

  Proposition 5 : Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ s'intersectent en une droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - 16t \\ y = 3 + 11t & \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Exercice 2: 4 points

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
   On note M l'événement « la personne choisie est malade » et T l'événement « le test est positif ».
   a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
   b. Démontrer que la probabilité $P(T)$ de l'événement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.
   c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
   Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».
2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.
   A partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Exercice 3: 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

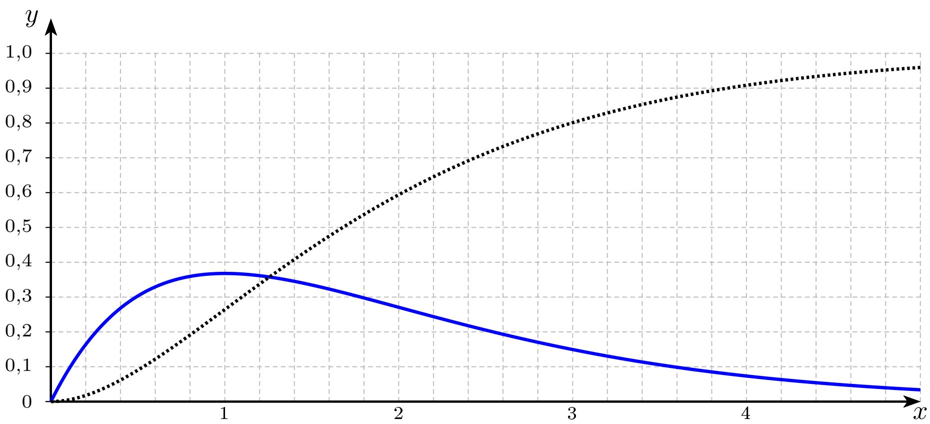
Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$. Déterminer $f'(x)$.
2. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B

Soit $\mathcal{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathcal{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on conjecturer pour la fonction $\mathcal{A}$?
3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.
   a. Démontrer que l'équation $\mathcal{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$
   b. Sur le graphique ci-dessous sont tracées la courbe $\mathcal{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathcal{A}$.
      i. Identifier les courbes $\mathcal{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
      ii. En déduire une valeur approchée du réel α.
      iii. Hachurer le domaine correspondant à $\mathcal{A}(\alpha)$.



4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ par $g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$. Déterminer $g'(x)$.
   b. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0;\ +\infty[$, une expression de $\mathcal{A}(t)$.
   c. Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathcal{A}(6)$.

Exercice 4: 5 points

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population. Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie. Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri. Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri. Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade. Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5 % des individus tombent malades ;
- 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience. On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. a. Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.
   b. Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

3. On admet que $c_{n+1} = 0,2b_n + c_n$.

Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet de même qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

b. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

c. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n

4. On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right) & 0{,}8^n & 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n\right) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$

a. Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \dfrac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right)$

b. Déterminer la limite de la suite (b_n).

5. On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroit. On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum. A cet effet, on utilise l'algorithme donné ci-dessous, dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

Variables	:	b, b', x, y sont des réels
		k est un entier naturel
Initialisation	:	Affecter à b la valeur 0
		Affecter à k la valeur 0
		Affecter à x la valeur 0,95
		Affecter à y la valeur 0,8
Traitement	:	Affecter à b' la valeur $\dfrac{1}{3}(x-y)$
		Tant que $b < b'$ faire :
		Affecter à k la valeur $k+1$
		Affecter à b la valeur b'
		Affecter à x la valeur 0,95x
		Affecter à y la valeur 0,80y
		Affecter à b' la valeur $\cdots\cdots$
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher $\cdots\cdots$

a. Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint.

b. Compléter le tableau ci-dessous.

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7e passage dans la boucle Tant que	7	0,162 9	0,663 4	0,167 8	0,165 2	VRAI
Après le 8e passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9e passage éventuel dans la boucle Tant que						

c. Conclure.