

Chapitre 11: Dérivation

Dans ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel appartenant à I .

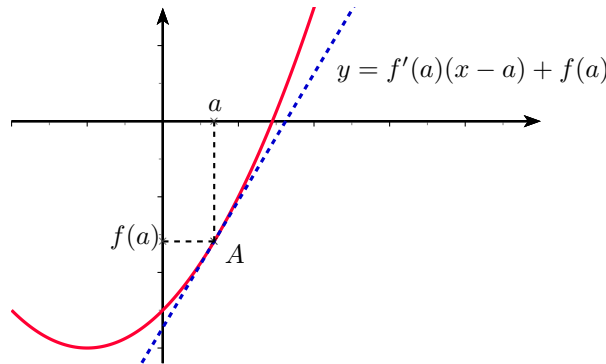
1 Dérivabilité

Définition:

f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Ainsi, dire que f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ signifie que la courbe de la fonction f admet en $A(a; f(a))$ une tangente non-v verticale d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$



2 Lien entre dérivabilité et continuité

Théorème:

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a .
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Démonstration:

Soit T la fonction définie par $T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ pour $h \neq 0$ avec $a+h \in I$.

f est dérivable en a donc T a pour limite $f'(a)$ lorsque h tend vers 0. Ainsi, pour $h \neq 0$:

$$T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \iff hT(h) = f(a+h) - f(a) \iff f(a+h) = f(a) + hT(h)$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = f'(a)$ on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$.

On pose $x = a+h$ soit $h = x-a$ et on obtient : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ soit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a .

Remarque:

La réciproque de ce théorème est fautive : la fonction racine carrée est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

3 Conséquences

On a montré en première que les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, que les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur domaine de définition et que la fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc ces fonctions sont continues sur ces ensembles d'après le théorème précédent.

Cependant pour la fonction racine carrée, on peut montrer qu'elle est aussi continue en 0 puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$

4 Dérivées de fonctions composées

4.1 Rappels

f	f dérivable sur	f'
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$ avec k réel	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$

4.2 Fonctions composées

Théorème:

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel :

- Pour $n \geq 2$, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$;
- Pour $n \geq 1$, la fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$.

Cette égalité se note aussi : $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$

Exemples:

- La fonction $f : x \mapsto (4x - 5)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \times 4 \times (4x - 5)^{3-1}$ soit $f'(x) = 12(4x - 5)^2$
- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 1)^4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -4 \times 2x \times \frac{1}{(x^2 + 1)^{4+1}}$ soit $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 + 1)^5}$

Théorème:

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) > 0$.

La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple:

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{7x - 2}$ est dérivable sur $\left] \frac{2}{7}; +\infty \right[$ et $f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x - 2}}$

4.3 Généralisation

Théorème:

Soit f dérivable sur J et u dérivable sur I telles que $u(x) \in J$ pour tout x de I . La fonction $g = f \circ u$ est alors dérivable sur I et :

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$