4 Dérivées de fonctions composées

4.1 Rappels

f	f dérivable sur	f'
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$ avec k réel	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$

4.2 Fonctions composées

Théorème:
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel :
- *Pour $n \geq 2$, la fonction u^n est dérivable sur I et*

- *Pour $n \geq 1$, la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$ et*

  Cette égalité ce note aussi :

Exemples:
- *La fonction $f : x \longmapsto (4x-5)^3$*

- *La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^4}$*

Théorème:
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) > 0$.
La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

Exemple:
La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{7x-2}$

4.3 Généralisation

Théorème:
Soit f dérivable sur J et u dérivable sur I telles que $u(x) \in J$ pour tout x de I. La fonction $g = f \circ u$ est alors dérivable sur I et :