# Chapitre 14: Exponentielle I

## 1 Définition

**Théorème:**
*Il existe une et une seule fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :*

$$(E) : \left\{ \begin{array}{l} f' = f \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$$

**Démonstartion:**
*Nous admettrons l'existence d'une telle fonction, montrons que celle-ci est unique.*

- *Montrons d'abord que si $f$ vérifie $(E)$ alors $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*
  *Pour cela, on introduit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$.*
  *$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :*

$$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0 \text{ car } f' = f.$$

  *La fonction $g$ est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = g(0) = f(0)f(0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
  *Supposons qu'il existe un réel $x_0$ vérifiant $f(x_0) = 0$, on aurait alors $g(x_0) = 1 = f(x_0)f(-x_0) = 0$ soit $1 = 0$ ce qui est absurde donc $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*

- *Soit $f_1$ et $f_2$ deux fonctions vérifiant $(E)$, posons $q = \dfrac{f_1}{f_2}$.*
  *Par ce qui précède $f_2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $q$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions dérivables.*
  *De plus, $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)' = \dfrac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2} = \dfrac{f_1f_2 - f_1f_2}{f_2^2} = 0$.*
  *La fonction $q$ est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $q(x) = q(0) = \dfrac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$ : on a donc montré que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ c'est à dire qu'il existe une unique fonction vérifiant $(E)$.*

**Définition:**
*On appelle fonction exponentielle, l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $(E)$. On la note $x \mapsto \exp(x)$.*

**Remarque:**
*On a démontré dans la preuve précédente que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*

## 2 Propriétés

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à elle-même.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\exp(0) = 1$.
- Pour tout $a$ et $b$ réels, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
- Pour tout $a$ et $b$ réels et $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}\,; \qquad \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}\,; \qquad \exp(na) = (\exp(a))^n.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

**Remarque:**
*On admettra que la fonction exponentielle est la seule fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tous $a$ et $b$ réels,*

$$f(a + b) = f(a) \times f(b) \text{ et } f'(0) = 1.$$

## 3 Notation $e^x$

**Définition:**
*L'image de* $1$ *par la fonction exponentielle est noté* $e$ *:* $\exp(1) = e$.

**Remarques:**
- *On a :* $e^2 = e \times e = \exp(1) \times \exp(1) = \exp(1+1) = \exp(2)$. *Ainsi d'une façon générale, on écrira* $e^x$ *au lieu de* $\exp(x)$.
- *On a* $e \simeq 2,718$.

**Propriété:**
*Avec cette nouvelle notation, on peut écrire les propriétés précédentes de la manière suivante :*
- $e^0 = 1$ *et pour* $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ *;*
- *pour tout* $a$ *et* $b$ *réels, et* $n \in \mathbb{Z}$ *:* $e^{a+b} = e^a e^b$ ; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ ; $e^{a-b} = e^a e^{-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ ; $e^{na} = (e^a)^n$.

## 4 Étude de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

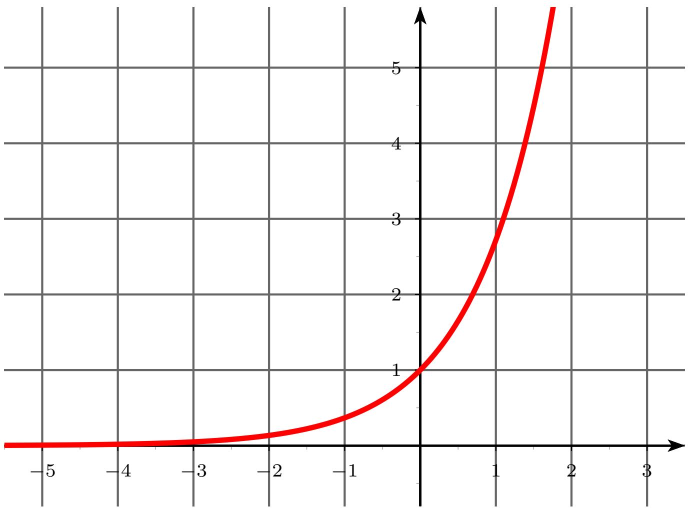
et

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

donc la fonction exponentielle admet le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\exp(x)$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |

Voici la courbe représentative de la fonction exponentielle :




La courbe représentative de la fonction exponentielle admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote en $-\infty$.