Propriétés et étude de la fonction exponentielle

I Un théorème fondamental

Théorème : Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$

Démonstration :

1. Étudier la continuité de $x \longmapsto exp(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par l'absurde que pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

On pourra supposer qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) < 0$

II Exponentielle d'une somme et conséquences

Théorème : Pour tout réel a et tout réel b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

1. **Démonstration :**
   a. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la fonction dérivée de $g : x \longmapsto \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$.
   b. Conclure.

2. **Conséquences :**
   a. Montrer que pour tout réel a, $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
   b. Montrer que pour tout réel a et tout réel b, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
   c. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$
   d. En déduire que pour tout entier relatif n, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

3. **Exercices :**
   a. Simplifier les expressions suivantes :

$$\exp(3)\exp(2) \qquad \exp(-3x)\exp(x) \qquad \frac{[\exp(2x+1)]^3\exp(-6x+1)}{\exp(4)}$$

$$\exp(-4)\exp(5) \qquad \frac{[\exp(3)]^2}{[\exp(2)]^3}$$

   b. Montrer que pour tout réel x, $\left[\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2 = \exp(x)$

III Étude de la fonction exponentielle

1. Étudier les variations de la fonction exponentielle.
2. Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto e^x - x$. En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle sur $[-5;2]$.
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$e^x = 1 \qquad e^{2x+3} = e^{\frac{1}{x}} \qquad \left(e^{-x+1}\right)^2 = \frac{1}{e^3}$$

$$e^x < -1 \qquad e^{4x-5} < e^2 \qquad e^{2x} - (e-1)e^{2x-1} - e \geq 0$$