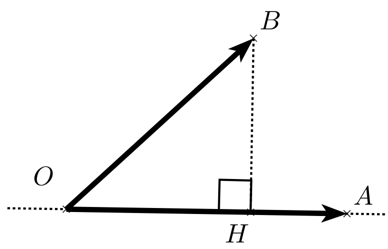
Chapitre 15: Produit scalaire I

Dans ce chapitre, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

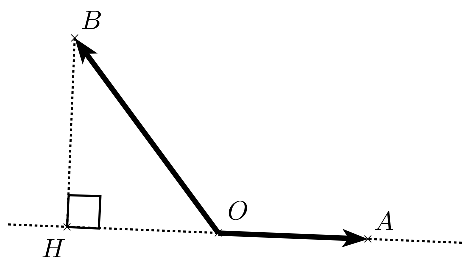
1 Produit scalaire dans le plan

Définition:
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non-nuls tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$, où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OH$



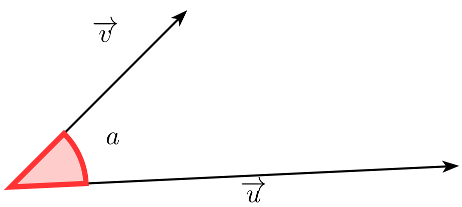
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OA \times OH$



Définition:
Pour tous vecteurs non-nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times cos(\alpha)$$

où α est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



Définition:
Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Remarque:
Si $\overrightarrow{u}(x; y)$ alors $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = x^2 + y^2$ et comme $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$, on a :

$$\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$$

Définition:
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

Propriété:
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

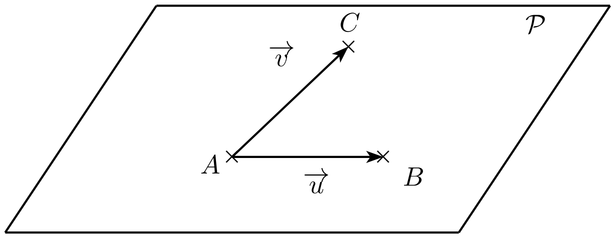
Propriété:
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout réel k :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $(k\,\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k\,(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

2 Produit scalaire dans l'espace

2.1 Définition

Définition:
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.
Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\mathcal{P}$.



Propriété:
Toutes les propriétés vues sur le produit scalaire dans le plan sont encore valables dans l'espace.

2.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété:
Soit $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}(x';y';z')$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Remarque:
Soit A et B deux points de l'espace, comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ c'est à dire $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$, on retrouve la formule de la distance :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

3 Orthogonalité dans l'espace

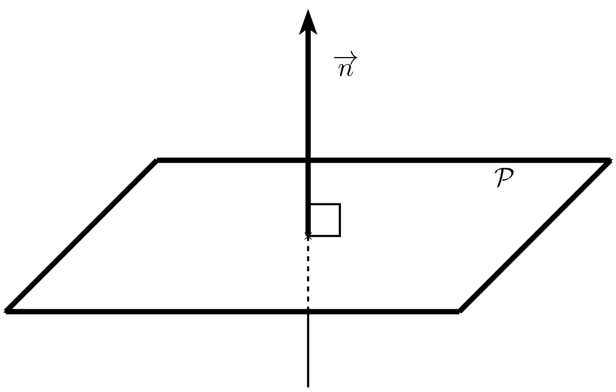
3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition:
Deux vecteurs de l'espace sont dits orthogonaux si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont orthogonales.

Propriété:
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

3.2 Vecteur normal à un plan

Définition:
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur formé par deux points de $\mathcal{P}$



3.3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition:
Le plan $\mathcal{P}$ qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$