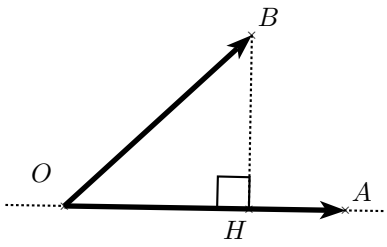
Chapitre 15: Produit scalaire I

Dans ce chapitre, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

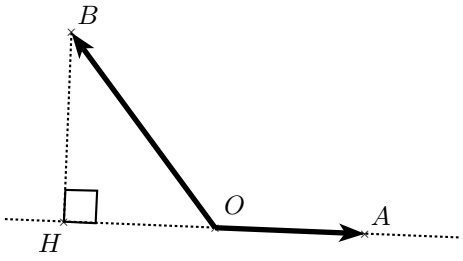
1 Produit scalaire dans le plan

Définition:
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non-nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. $\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$, où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).

$\vec{u}.\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$



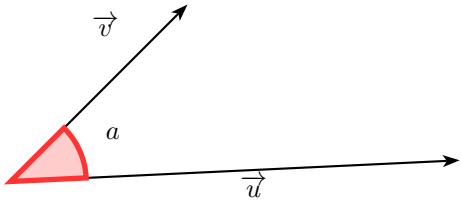
$\vec{u}.\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$



Définition:
Pour tous vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\alpha)$$

où α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.



Définition:
Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque:
Si $\vec{u}(x; y)$ alors $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et comme $||\vec{u}|| = \ldots\ldots\ldots\ldots$, on a :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition:
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété:
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\ldots\ldots\ldots\ldots$

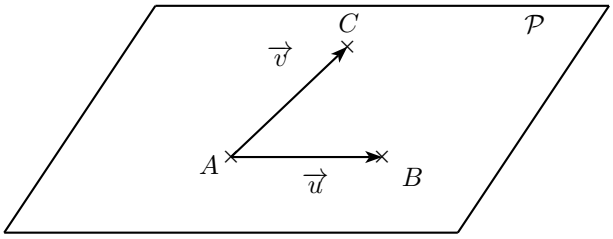
Propriété:
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel k :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(k\,\vec{u}).\vec{v} = k\,(\vec{u}.\vec{v})$

2 Produit scalaire dans l'espace

2.1 Définition

Définition:
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.
$\vec{u} \cdot \vec{v}$, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{P}$.



Propriété:
Toutes les propriétés vues sur le produit scalaire dans le plan sont encore valables dans l'espace.

2.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété:
Soit $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque:
Soit A et B deux points de l'espace, comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ c'est à dire $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$, on retrouve la formule de la distance :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

3 Orthogonalité dans l'espace

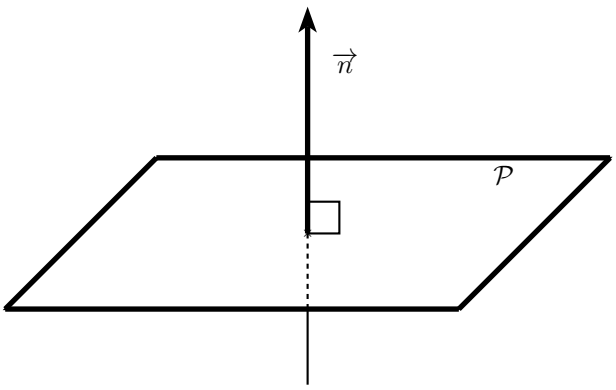
3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition:
Deux vecteurs de l'espace sont dits orthogonaux si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont orthogonales.

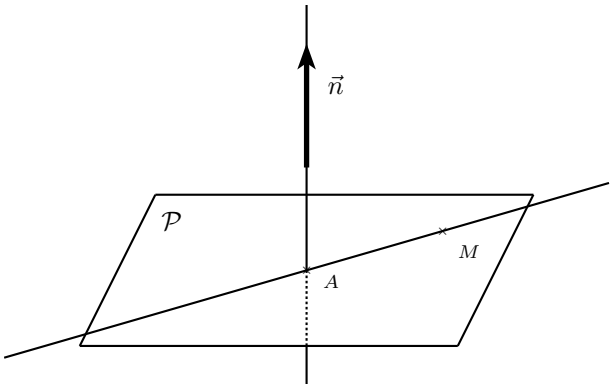
Propriété:
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3.2 Vecteur normal à un plan

Définition:
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur formé par deux points de $\mathcal{P}$



3.3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition:
Le plan $\mathcal{P}$ qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

.....