

Chapitre 16: Intégration II

1 Continuité et primitives

Théorème:

Toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet des primitives sur $[a; b]$.

Démonstration: (R.O.C.)

On admet que toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet un minimum m et un maximum M .

Soit donc f une fonction continue sur $[a; b]$. Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ sur $[a; b]$ donc la fonction $h(x) = f(x) - m$ est une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

D'après le théorème précédent, h admet une primitive Φ sur $[a; b]$, avec $\Phi'(x) = h(x)$.

Posons donc $F(x) = \Phi(x) + mx$.

F est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[a; b]$

Remarque:

On admettra que ce résultat peut s'étendre pour un intervalle quelconque I .

2 Extension de la notion d'intégrale

On a défini l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et on démontré que si F est une primitive de f sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. On admet dans la suite du chapitre que cette formule s'étend au cas d'une fonction continue de signe quelconque sur $[a; b]$ et on pose la définition suivante :

Définition:

f est une fonction continue sur un intervalle I , F est une primitive de f sur I , a et b sont deux nombres quelconques de I .

L'intégrale de la fonction f entre a et b est le nombre $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Remarque:

On note

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Exemple:

$x \mapsto 6x^2$ est une fonction continue sur $[-3; 4]$ donc $\int_{-3}^4 6x^2 dx = [2x^3]_{-3}^4 = 128 - (-54) = 182$

Propriété:

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ alors $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)dx$.

3 Linéarité de l'intégration

Théorème:

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et λ un nombre réel :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Démonstration:

En exercice...

Corollaire:

Pour $a < b$, si $f \leq g$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Démonstration:

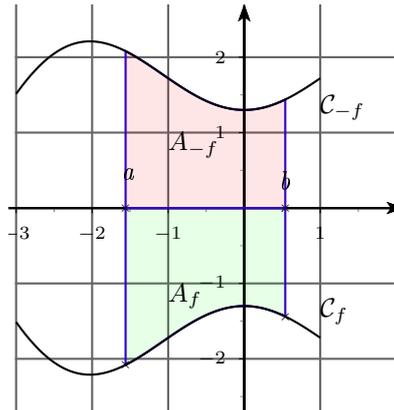
Considérons $f - g \geq 0$ par hypothèse donc $\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Remarque:

Attention, la réciproque est fautive.

Propriété:

Soit f une fonction continue et négative sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'opposé de l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe C .

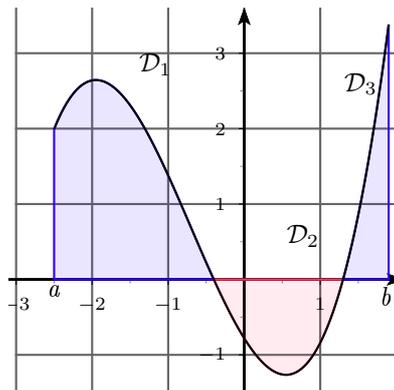


En effet, $-f$ est positive donc $\int_a^b -f(x)dx = A_{-f} = A_f$ et $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ donc $\int_a^b f(x)dx = -A_f$

Propriété:

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ (de signe quelconque) et C sa courbe représentative.

$\int_a^b f(x)dx$ est la somme des aires « algébriques » des domaines entre C et l'axe des abscisses.



Par exemple, sur la figure ci-dessus :

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{A}_{D_1} - \mathcal{A}_{D_2} + \mathcal{A}_{D_3}$$

Propriété:

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ tel que $g(x) \leq f(x)$ sur $[a; b]$ alors l'aire du domaine \mathcal{D} délimité par C_f et C_g sur $[a; b]$ est définie par $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

4 Relation de Chasles

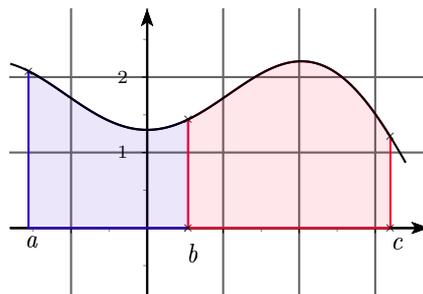
Propriété: (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur I et a, b, c trois réels de I alors

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Remarque:

Dans le cas où f est positive sur I et $a \leq b \leq c$, cette propriété est illustrée par le graphique ci-dessous :



Cependant la relation de Chasles est vraie quels que soient l'ordre des réels a, b, c et le signe de f .

5 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition: (Valeur moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Théorème: (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et soit m et M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour $x \in [a; b]$. On a alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$