

Linéarité de l'intégrale et conséquences

Exercice 1:

Démontrer le théorème suivant : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et λ un nombre réel :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$
- $\int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx$

Exercice 2:

Démontrer que $\int_0^1 e^x \, dx = e - 1$ et $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$.

En déduire $\int_0^1 5e^x - 3x^2 \, dx$ et $\int_0^1 e^x + 5x^2 \, dx$.

Exercice 3:

Démontrer le théorème suivant :

Pour $a < b$, si $f \leq g$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$

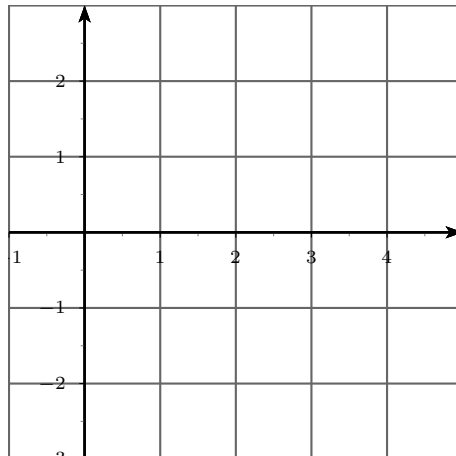
Exercice 4:

Démontrer à l'aide d'un exemple que la réciproque du théorème ci-dessous est fausse.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$

1. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction f sur $[0; 4]$.



2. Déterminer le signe de f sur $[0; 4]$.

3. Calculer $\int_0^4 f(x) \, dx$.

4. En déduire l'aire entre la courbe de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.

Exercice 6:

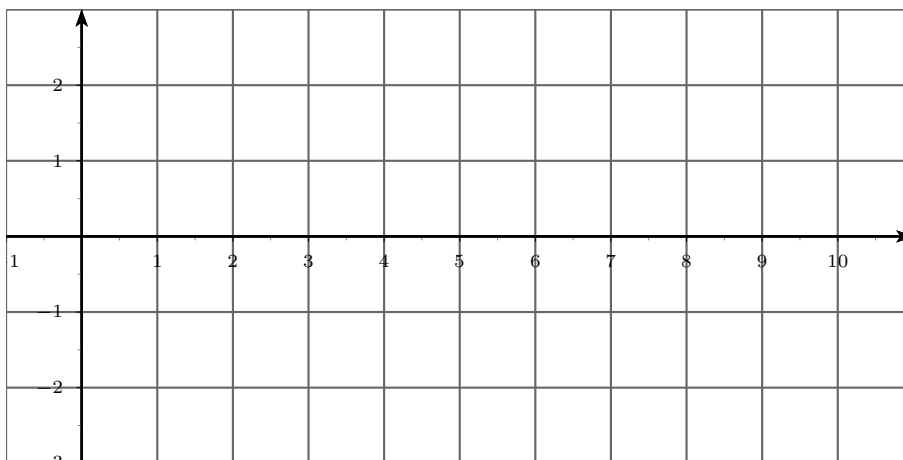
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-2}{(1-x)^2}$.

Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 10$.

Exercice 7:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x < 4 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3} & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction f sur $[0; 10]$.



3. Déterminer le signe de f sur $[0; 10]$.
4. Calculer $\int_0^2 f(x)dx$, $\int_2^4 f(x)dx$, $\int_4^7 f(x)dx$, $\int_7^{10} f(x)dx$.
5. En déduire l'aire entre la courbe de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 10$.

Exercice 8:

Déterminer l'aire située entre les courbes des fonctions carré et racine carré pour $x \in [0; 1]$:

