Exercices type bac

Polynésie septembre 2010 (4 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction g.
4. Donner le tableau de variations de g.
5. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution. On note α cette solution.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
6. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $\mathbb{R}$.

Amérique du Nord 27 mai 2011 (3 points)

Partie 1

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$$

1. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0\,;\,1]$.
2. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
3. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

   a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

   b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

La Réunion 22 juin 2011 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(0; \vec{i}, \vec{j})$

1. a. Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right)^2}$.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Montrer que la droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.