

Chapitre 18: Produit scalaire II

1 Équation cartésienne d'un plan

Théorème:

Dans un repère orthonormé :

- Si $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$;
- Si a, b et c sont trois nombres réels non tous nuls alors l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Démonstration:

- Si $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ alors $\vec{n}$ est non-nul. Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz + d = 0$$

avec $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Ainsi $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

- Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b et c sont trois nombres réels non tous nuls. Supposons $a \neq 0$ alors le point $A\left(\frac{-d}{a}; 0; 0\right) \in \mathcal{E}$ et

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = ax + by + cz + d = 0$$

Ainsi $M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ donc $\mathcal{E}$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

2 Plans perpendiculaires

Définition:

Deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont dits perpendiculaires si leurs vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux soit si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

