

Chapitre 22: Fonction logarithme II

1 Limites

Propriété:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

On obtient le tableau de variations complet de la fonction logarithme :

x	0	1	$+\infty$
$(\ln x)'$		+	+
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Propriété:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

2 Dérivation et primitive

Propriété:

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I . La fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et

$$(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple:

Soit $u : x \mapsto 1 + 2x^2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

u est une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 4x$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \ln(2x^2 + 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{4x}{2x^2 + 1}$$

Théorème:

Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I . La fonction $\frac{u'(x)}{u(x)}$ admet des primitives de la forme $\ln[u(x)] + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple:

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2}$

$u : x \mapsto 1 + x + x^2$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 1 + 2x$. De plus, $1 + x + x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives de la forme

$$F(x) = \ln[1 + x + x^2] + k$$